Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

– s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
– s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
– s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
– s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $A_n$ l'événement : "le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie".
De plus, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. On admet que $(E_n, F_n, G_n, H_n)$ est un système complet d'événements.
   (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on a : $P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$.
   (b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.
   (c) Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$.

   Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$.

2. 
   (a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer $PQ$. En déduire que $P$ est inversible et donner son inverse.
   (b) On note $C_1$, $C_2$, $C_3$ et $C_4$ les colonnes de $P$. Calculer $MC_1$, $MC_2$, $MC_3$ et $MC_4$, puis en déduire que $-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ et 1 sont les valeurs propres de $M$.
   (c) Justifier que $M = PDP^{-1}$, où $D$ est une matrice diagonale que l'on déterminera.

***Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.***

3. (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.
   (b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2, \quad U_n = M^{n-2}U_2$.
   (c) Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de $M^n$, puis en déduire $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.
   (d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(F_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}$$