Exercice 1
On pose $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Montrer que pour tous réels x, y, on a
$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y) &= \mathrm{ch}(x+y) \\ \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y) &= \mathrm{sh}(x+y) \end{aligned}$$
2. Montrer que pour tout réel x et tout entier n, on a
$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x) \\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(nx) & \mathrm{sh}(nx) \\ \mathrm{sh}(nx) & \mathrm{ch}(nx) \end{pmatrix}$$
3. On pose $A(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x) \\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x) \end{pmatrix}$
   (a) Pour quelles valeurs de x a-t-on $A(x) = I_2$?
   (b) Calculer $A(x)A(y)$.
   (c) Pour x fixé, existe-t-il y tel que $A(y)$ soit l'inverse de $A(x)$?
   (d) En déduire que $A(x)$ est toujours inversible et exhiber son inverse.

Exercice 2
On considère la matrice : $M = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

1. **Calcul de** M^n. On considère la matrice $A = M - 6I$.
   (a) Calculer A et A^2.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe un réel u_n tel que $M^n = 6^n(Id + u_n A)$.
   (c) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire u_n en fonction de n.
2. **Application**. On considère 4 suites $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ et $(d_n)_n$ telles que
$$\left\{ \begin{aligned} a_{n+1} &= 5a_n - b_n - 2c_n + d_n \\ b_{n+1} &= 6b_n \\ c_{n+1} &= a_n + b_n + 8c_n - d_n \\ d_{n+1} &= a_n + b_n + 2c_n + 5d_n \end{aligned} \right. \quad \text{et on pose } X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que $X_{n+1} = MX_n$ puis vérifier que $\forall n \geqslant 0$, $X_n = M^n X_0$.
   (b) En déduire l'expression de a_n, b_n, c_n, d_n en fonction de n.

Exercice 3
Soit a un nombre réel et $M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$

1. Montrer que, pour tous réels a, b, on a : $M(a).M(b) = M(a + b - 3ab)$.
2. On remarque que $M(0) = Id$
   (a) On suppose que $a \neq \dfrac{1}{3}$.
   Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur b pour que $M(b)$ soit l'inverse de $M(a)$. Déterminer alors l'inverse de $M(a)$.
   (b) Calculer $M(\dfrac{1}{3})$. Est-elle inversible ?
   (c) En déduire les valeurs de a pour lesquelles la matrice $M(a)$ est inversible et exprimer son inverse.
3. Déterminer le réel a_0 non nul, tel que : $[M(a_0)]^2 = M(a_0)$
4. On considère les matrices : $P = M(a_0)$ et $Q = I - P$ où I désigne la matrice carrée unité d'ordre 3.
   (a) Montrer qu'il existe un réel α, que l'on exprimera en fonction de a, tel que : $M(a) = P + \alpha Q$
   (b) Calculer P^2, QP, PQ, Q^2.
   (c) Pour tout entier naturel n, non nul, montrer que $[M(a)]^n$ s'écrit comme combinaison linéaire de P et Q.
   (d) Expliciter alors la matrice $[M(a)]^n$.