Exercice 1

Deux pièces A et B sont reliées entre elles par une porte ouverte. Seule la pièce B possède une issue vers l'extérieur. Une guêpe initialement dans la pièce A voudrait sortir à l'air libre. Son trajet obéit aux règles suivantes :

- Lorsqu'elle est en A au temps $t = n$, alors, au temps $t = n + 1$, elle reste en A avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$, ou elle passe en B avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$
- Lorsqu'elle est en B au temps $t = n$, alors, au temps $t = n + 1$, elle retourne en A avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$, ou elle reste en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$, ou elle sort à l'air libre avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$.
- Au temps $t = 0$, la guêpe est en A. Lorsqu'elle est sortie, elle ne revient plus.
  On note A_n (resp. B_n, resp. S_n) les événements : “à l'instant $t = n$, elle est en A (resp. en B, resp. elle sort), et a_n, b_n, s_n leurs probabilités respectives.

1. (a) Calculer a_0, b_0, s_0, a_1, b_1, s_1.
2. Sachant qu'au temps $t = 2$ elle est en A, quelle est la probabilité qu'elle ait été en B au temps $t = 1$?
3. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et s_n. Même question avec b_{n+1}
4. Montrer que a et b sont des suites récurrentes d'ordre 2.
   En déduire $\forall n \geqslant 1$ l'expression de a_n (resp. b_n) en fonction de n.
5. Interpréter alors la limite de la suite a (resp. b) trouvées dans la question précédente.
6. Justifier que $\forall n \geqslant 2$, $s_n = \frac{1}{4}b_{n-1}$. En déduire s_n en fonction de n.

Exercice 2

Une urne contient 2 boules noires et 3 boules blanches. On tire simultanément 2 boules de l'urne.

- Quelle est la probabilité d'obtenir ainsi 2 boules noires ? une seule boule noire ? aucune boule noire ?

Une urne contient 1 boule noire et 4 boules blanches. On tire simultanément 2 boules de l'urne.

- Quelle est la probabilité d'obtenir ainsi 1 boules noires ? aucune boule noire ?

On dispose d'une urne U_0 contenant 2 boules noires et trois boules blanches, et de n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$ chacune contenant 3 boules blanches . On tire simultanément 2 boules de l'urne U_0, on les place dans l'urne U_1. De l'urne U_1 contenant alors 5 boules, on tire simultanément 2 boules et on les place dans U_2 .... Et ainsi de suite jusqu'à la $n^{ème}$ urne.

On note

- A_k : " l'urne U_k contient aucune boule noire après avoir placer les deux boules provenant de U_{k-1} et avant de sélectionner de nouveau deux boules "
- B_k : " l'urne U_k contient une seule boule noire après avoir placer les deux boules provenant de U_{k-1} et avant de sélectionner de nouveau deux boules "
- C_k : " l'urne U_k contient deux boules noires après avoir placer les deux boules provenant de U_{k-1} et avant de sélectionner de nouveau deux boules "

1. Calculer $p(A_1), P(B_1)$ et $P(C_1)$.
2. Calculer $P(A_2), P(B_2)$ $P(C_2)$.
3. Pour k entier naturel non nul, décrire l'événement (C_k) et en déduire que $P(C_k) = \frac{1}{10^k}$.
4. Pour k entier naturel non nul, montrer que $P(B_{k+1}) = \frac{6}{10}P(C_k) + \frac{4}{10}P(B_k)$..
5. Montrer par récurrence que, pour n entier naturel non nul, on a :

$$P(B_n) = 2 \times (\frac{4}{10})^n - \frac{2}{10^n}.$$