Exercice 1

Soit $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $\alpha_{n+2} = \sqrt{\alpha_{n+1}\alpha_n}$ avec $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = 8$.

1. Démontrer que $\alpha_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 0$
   Indication : on posera l'hypothèse de récurrence P_n : " $\alpha_n > 0$ et $\alpha_{n+1} > 0$ "
2. Vérifier que la suite u définie par $u_n = \ln \alpha_n$ vérifie : $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. En déduire que la suite u converge puis justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 4$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - u_n$ et $u_0 = \ln 2$.
On rappelle que $\ln 2 \simeq 0,7$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. On admet que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 0$. Démontrer que $\forall n \geqslant 1, \quad u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
3. Justifier que la suite u converge et expliciter sa limite.
4. On introduit la suite $w_n = (-1)^{n-1}u_n$.
   (a) Justifier que $\forall n \geqslant 0, \quad w_{n+1} = w_n + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$
   (b) Démontrer que $\forall n \geqslant 1 \qquad w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Problème

Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$ avec $u_0 = 2$.

1. <u>Etude préliminaire</u> :
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 1$.
   (b) Démontrer que la suite u possède une unique limite éventuelle et expliciter cette limite.

   La suite de l'exercice est consacrée à l'étude de la convergence de la suite. u On propose deux approches différentes.
2. <u>Première méthode</u> :
   (a) Vérifier que $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ définie une suite géométrique.
   (b) Expliciter l'expression de v_n en fonction de n puis donner l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.
3. <u>Deuxième méthode</u> :

(a) Déterminer le signe de $f(x) = \dfrac{1+2x}{2+x} - x$ selon les différentes valeurs de x.

(b) Etudier la monotonie de $(u_n)_n$.

(c) Prouver que la suite u converge et expliciter $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.