Exercice 1
Séries géométriques. Soit $x \in]-1,1[$. On pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. $S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Puisque $x \in]-1,1[$, la suite (x^{n+1}) converge vers 0 et $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}$. Par définition de la convergence des séries, la série $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
2. $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ donc $S_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = x^{-1}\sum_{k=0}^{n} kx^k$. D'autre part, $S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ donc $S_n'(x) = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$. Par conséquent, on a
$$x^{-1}\sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}.$$
3. En multipliant par x l'égalité précédente, on en déduit que
$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = x.\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}.$$
4. $nx^n = ne^{n\ln x}$ donc $\lim_{n\to+\infty} ne^{n\ln x} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln x}$ (cf. le cours sur les limites usuelles) et puisque $\ln x < 0$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln x}$, c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} nx^n = 0$.
5. Par définition, la série $\sum_{n\geqslant 0} nx^n$ si et seulement la suite $\sum_{k=0}^{n} kx^k$ converge lorsque $n\to+\infty$. Ensuite
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} nx^{n+1} &= \lim_{n\to+\infty}(nx^n)x = x\lim_{n\to+\infty}(nx^n) = 0\\ \lim_{n\to+\infty}(n+1)x^n &= \lim_{n\to+\infty} nx^n + \lim_{n\to+\infty} x^n = 0+0=0\end{aligned}$$
donc $\lim_{n\to+\infty} x.\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2} = x\frac{1}{(1-x)^2}$, ce qui signifie que la série $\sum_{n\geqslant 0} nx^n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Exercice 2

1.

(a) Puisque $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times$, donc
$$\forall t \in [\![n+1,n+2]\!], \quad \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$
et, en intégrant sur $[\![n+1,n+2]\!]$, on en déduit que
$$\int_{n+1}^{n+2}\frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{(n+1)^\alpha}dt = \frac{1}{(n+1)^\alpha}\int_{n+1}^{n+2}dt = \frac{1}{(n+1)^\alpha}[t]_{t=n+1}^{t=n+2} = \frac{1}{(n+1)^\alpha}. \tag{1}$$
La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[\![n,n+1]\!]$ donc
$$\forall t \in [\![n,n+1]\!], \quad \frac{1}{t^\alpha} \geqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$
et, en intégrant sur $[\![n,n+1]\!]$, on en déduit que
$$\int_{n}^{n+1}\frac{dt}{t^\alpha} \geqslant \int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{(n+1)^\alpha}dt = \frac{1}{(n+1)^\alpha}. \tag{2}$$
La combinaison des inégalités (1) et (2) nous fournit l'encadrement recherché.

(b) On procède par récurrence. Posons $(\mathcal{H}_n) : \int_1^{n+1}\frac{dt}{t^\alpha} \leqslant S_n \leqslant 1 + \int_1^{n}\frac{dt}{t^\alpha}$.
Initialisation : la question précédente montre, en choisissant $n=0$ dans la première inégalité que $\int_1^2 \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{1^\alpha} = S_1$. D'autre part, $S_1 = \frac{1}{1^\alpha} = 1 = 1 + \underbrace{\int_1^1 \frac{dt}{t^\alpha}}_{=0}$ donc $\int_1^2 \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant S_1 \leqslant 1 + \int_1^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, ce qui démontre $(\mathcal{H}_1)$.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie, i.e. $\int_1^{n+1}\frac{dt}{t^\alpha} \leqslant S_n \leqslant 1 + \int_1^{n}\frac{dt}{t^\alpha}$. La question précédente, montre que $\int_{n+1}^{n+2}\frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1}\frac{dt}{t^\alpha}$. L'addition de ces deux encadrements nous donne
$$\int_1^{n+1}\frac{dt}{t^\alpha} + \int_{n+1}^{n+2}\frac{dt}{t^\alpha} \leqslant S_n + \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^{n}\frac{dt}{t^\alpha} + \int_n^{n+1}\frac{dt}{t^\alpha}.$$

En utilisant la relation de Chasles ainsi que l'égalité $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$, on en déduit l'égalité souhaitée

$$\int_1^{n+2} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant S_{n+1} \leqslant 1 + \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha},$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $(\mathcal{H}_n)$ est vraie.

(c) Si $\alpha \neq 1$, $\int_1^n \dfrac{dt}{t^\alpha} = \int_1^n t^{-\alpha}dt = [\dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}]_{t=1}^{t=n} = \dfrac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha}-1)$.

Si $\alpha = 1$, $\int_1^n \dfrac{dt}{t} = [\ln t]_{t=1}^{t=n} = \ln n$.

2. Les questions 2.b et 2.c, appliquée à $\alpha = 1$, nous donne l'encadrement

$$\underbrace{\ln n}_{\to +\infty} \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln n.$$

La suite $(S_n)_n$ est supérieure à la suite $(\ln n)_n$ qui tend vers $+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge. D'autre part, li'négalité suivante

$$1 \leqslant \frac{S_n}{\ln n} \leqslant \underbrace{\frac{1}{\ln n} + 1}_{\to 1}$$

permet d'appliquer le théorème d'encadrement donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\ln n} = 1$, c'est-à-dire $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

3. Puisque $\alpha \in]0,1[$ et que $k \geqslant 1$, $k^\alpha \leqslant k^1$ donc $\dfrac{1}{k^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{k}$. En additionnant cette inégalité pour toutes les valeurs de k entre 1 et n, on obtient

$$\forall n \geqslant 1, \quad S_n \geqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geqslant \ln n \text{ (d'après la question 2)}$$

La suite $(S_n)_n$ est supérieure à la suite $(\ln n)_n$ qui diverge vers $+\infty$ donc la suite $(S_n)_n$ diverge vers $+\infty$, c'est-à-dire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge si $\alpha \in]0,1[$.

4.

(a) $S_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} + S_n$ donc $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \geqslant 0$ et la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

(b) La combinaison de la question 2.b et 2.c montre que

$$S_n \leqslant 1 + \underbrace{\frac{1}{1-\alpha}}_{<0}(\underbrace{n^{1-\alpha}-1}_{<0}) = 1 + \underbrace{\frac{1}{\alpha-1}}_{>0}(1 - \underbrace{n^{1-\alpha}}_{>0}) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

(c) La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$ donc elle est convergente et sa limite est inférieure ou égale à $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$. Autrement dit, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge lorsque $\alpha > 1$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} \leqslant \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

Exercice 3

1.

(a) $$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

(b) $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \dfrac{|x|}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2|x| \leqslant n+1$ donc si $n \geqslant 2|x| - 1$ alors $|u_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n(x)|$. Il suffit de prendre $N = E(2|x|-1)+1$ (si $n \geqslant 3,7$ alors on choisi $N = 4 = 3+1 = E(3,7)+1$)

(c) La récurrence est notre amie. Posons $(\mathcal{P}_n)$: $|u_n(x)| \leqslant (\dfrac{1}{2})^{n-N}|u_N(x)|$.

Initialisation : $n = N$, $(\dfrac{1}{2})^{N-N}|u_N(x)| = |u_N(x)|$ donc $(\mathcal{P}_N)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie. La question 1.b montre que $|u_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n(x)|$ et l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$ montre que $|u_n(x)| \leqslant (\dfrac{1}{2})^{n-N}|u_N(x)|$ donc

$$|u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n-N}|u_N(x)| \leqslant (\frac{1}{2})^{n+1-N}|u_N(x)|,$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$. Ainsi, $\forall n \geqslant N$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.

Pour $n \geqslant N$, la suite $(|u_n(x)|)_n$ est positive et majorée par la suite géométrique $(\dfrac{1}{2})^{n-N}|u_N(x)|$, dont la raison $\dfrac{1}{2}$ appartient à $]-1,1[$ donc elle converge vers 0. Le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n(x)|=0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0$ lorsque $x\neq 0$. Bien entendu, si $x=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=\lim\limits_{n\to+\infty}0=0$.

2.

(a) Si $x\geqslant 0$, $\forall t\in[0,x]$, on a :

$$\begin{aligned}0 &\leqslant (x-t)\leqslant x\Rightarrow 0\leqslant (x-t)^n\leqslant |x|^n\Rightarrow 0\leqslant\frac{(x-t)^n}{n!}\leqslant\frac{x^n}{n!}\\ &\Rightarrow 0\leqslant\frac{(x-t)^n}{n!}e^t\leqslant\frac{x^n}{n!}e^t.\end{aligned}$$

En intégrant sur $[0,x]$, on obtient

$$0\leqslant I_n(x)\leqslant\int_0^x\frac{x^n}{n!}e^tdt=\frac{x^n}{n!}[e^t]_{t=0}^{t=x}=\frac{x^n}{n!}(e^x-1)\leqslant\frac{x^n}{n!}e^x$$

Ainsi, la distance de $I_n(x)$ à 0 est moindre que $\dfrac{x^n}{n!}e^x$ qui est positif donc

$$\forall x\geqslant 0,\quad |I_n(x)|\leqslant\frac{|x|^n}{n!}(e^x-1)=\frac{|x|^n}{n!}\left|1-e^x\right|.$$

Si $x<0$, $I_n(x)=-\int\limits_x^0\dfrac{(x-t)^n}{n!}e^tdt$ (pour avoir un ordre d'intégration naturel, $a<b$ afin d'appliquer les théorèmes d'encadrement). $\forall t\in[x,0]$, on a

$$\begin{aligned}x &\leqslant x-t\leqslant 0\leqslant -x\Rightarrow |x-t|\leqslant|x|\Rightarrow|x-t|^n\leqslant|x|^n\\ &\Rightarrow\frac{|x-t|^n}{n!}e^t\leqslant\frac{|x|^n}{n!}e^t\Leftrightarrow-\frac{|x|^n}{n!}e^t\leqslant\frac{(x-t)^n}{n!}e^t\leqslant\frac{|x|^n}{n!}e^t\\ &\Rightarrow-\frac{|x|^n}{n!}e^t\leqslant-\frac{(x-t)^n}{n!}\leqslant\frac{|x|^n}{n!}e^t\end{aligned}$$

en intégrant sur $[x,0]$, on obtient donc

$$\begin{aligned}-\int_x^0\frac{|x|^n}{n!}e^tdt &\leqslant I_n(x)\leqslant\int_x^0\frac{|x|^n}{n!}e^t\Leftrightarrow-\frac{|x|^n}{n!}(1-e^x)\leqslant I_n(x)\leqslant\frac{|x|^n}{n!}(1-e^x)\\ &\Rightarrow|I_n(x)|\leqslant\frac{|x|^n}{n!}(1-e^x)=\frac{|x|^n}{n!}|1-e^x|\end{aligned}$$

La suite $(|I_n(x)|)_n$ est positive et majorée par la suite $\dfrac{|x|^n}{n!}\times|1-e^x|$ qui tend vers 0 lorsque $n\to+\infty$ (la question précédente avec $|x|$). Le théorème d'encadrement nous assure que $\lim\limits_{n\to+\infty}|I_n(x)|=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n(x)=0$.

(b) L'intégration par partie est notre grande amie. Nous allons intégrer l'exponentielle et dériver $t\mapsto(x-t)^{n+1}$ (On veut passer d'un indice $n+1$ à un indice n). Posons $\begin{cases}u(t)=(x-t)^{n+1}\\ v'(t)=e^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'(t)=-(n+1)(x-t)^n\\ v(t)=e^t\end{cases}$ et nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^tdt &= \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\right]_{t=0}^{t=x}-\int_0^x\frac{-(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}e^tdt\\ &=\frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x-\frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!}e^0+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}e^tdt\end{aligned}$$

donc

$$\forall n\geqslant 0,\quad I_{n+1}(x)=-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+I_n(x).$$

(c) On pose $(\mathcal{H}_n)$: $\quad e^x=\sum\limits_{k=0}^n\dfrac{x^k}{k!}+I_n(x)$.

Initialisation : $n=0$, $I_0=\int\limits_0^x e^tdt=[e^t]_{t=0}^{t=x}=e^x-1$ donc $e^x=I_0+1=I_0+\sum\limits_{k=0}^0\dfrac{x^k}{k!}$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.

Hérédité : supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie, i.e. $e^x=\sum\limits_{k=0}^n\dfrac{x^k}{k!}+I_n(x)\Leftrightarrow I_n(x)=e^x-\sum\limits_{k=0}^n\dfrac{x^k}{k!}$. Si nous la combinons à la formule d'intégration par parties de la question $2.B$, nous obtenons

$$I_{n+1}(x)=-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+I_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+e^{-x}-\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}=e^x-\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}$$

donc $e^x=\sum\limits_{k=0}^{n+1}\dfrac{x^k}{k!}+I_{n+1}(x)$, ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $(\mathcal{H}_n)$ est vraie.

3. Nous avons $\sum\limits_{k=0}^n\dfrac{x^k}{k!}=e^x-I_n(x)$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n(x)=0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^n\dfrac{x^k}{k!}$ converge vers e^x. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{x^n}{n!}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=e^x$.