1. **Etude de la classe de f.**

   (a) Etude globale : $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x - 1$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \neq 0, \quad e^x - 1 \neq 0$ donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$.
   Etude en 0 : on sait que $e^x - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} x$ donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$ ce qui implique que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$ et qui démontre que f est continue en 0.

   (b) $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x - 1$ sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \neq 0, \quad e^x - 1 \neq 0$ donc f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\forall x > 0, \quad f'(x) = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}$.

   (c) Nous allons déterminer un équivalent de $f'(x)$. Il est immédiat pour commencer que $(e^x - 1)^2 \underset{x\to 0^+}{\sim} x^2$ donc nous allons effectuer un $DL_2(0)$ du numérateur.

$$\begin{aligned} e^x - 1 - xe^x &= (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 1 - x(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^2) + o(x^3) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

   On en déduit que $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$

   (d) Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$, l'application du théorème de prolongement continue de la dérivée montre que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

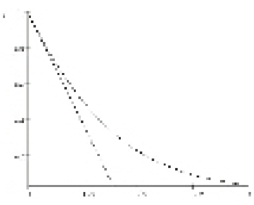
   (e) $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x - 1$ sont C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \neq 0, \quad e^x - 1 \neq 0$ donc f est C^2 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2})' = \frac{(e^x - e^x - xe^x)(e^x-1)^2 - (e^x - 1 - xe^x)2e^x(e^x-1)}{(e^x-1)^4} \\ &= \frac{-xe^x(e^x-1)^2 - (e^x - 1 - xe^x)2e^x(e^x-1)}{(e^x-1)^4} = e^x(e^x-1)\frac{-x(e^x-1) - 2(e^x - 1 - xe^x)}{(e^x-1)^4} \\ &= \frac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2) \end{aligned}$$

2. **Etude des variations de f.**

   (a) La fonction g est clairement de classe C^2 sur $[0; +\infty[$ et $g'(x) = -e^x + xe^x + 1$ et $g''(x) = xe^x$. La fonction g'' est strictement positive sur $]0; +\infty[$ donc g' est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Puisque $g'(0) = 0$, on en déduit que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $g(0) = 0$ donc g est strictement positive sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[, \quad f''(x) > 0$.

   (b) $f'' > 0$ donc f' est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or on a $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $f'(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{-xe^x}{(e^x)^2} = -xe^{-x} \underset{x\to +\infty}{\to} 0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = 0$. En particulier, $\forall x \geqslant 0, \quad -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0$ et la fonction f' est négative. Par suite, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On conclut en remarquant que $f(0) = 1$ et $f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{x}{e^x} = xe^{-x} \underset{x\to +\infty}{\to} 0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$, on obtient que $\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   (c) 

(d) $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $f(0) = 1$ donc l'équation de la tangente en 0 est $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$. On pose

$$\forall x > 0, \quad h(x) = f(x) - (-\frac{1}{2}x+1) = \frac{x}{e^x - 1} - (-\frac{1}{2}x+1) = \frac{1}{2}.\frac{x - 2e^x + xe^x + 2}{e^x - 1} = \frac{1}{2}\frac{g(x)}{e^x - 1}$$

Ainsi, en utilisant la question 2a, on obtient que h est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente en 0.

3.

(a) Cela découle immédiatement de la question 2b.

(b) $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{x}{e^x - 1} = x \Leftrightarrow e^x - 1 = 1$ (car $x > 0$) $\Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

(c) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\forall x \geqslant 0, \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc la théorème des accroissements finis montre que

$$\forall x \geqslant 0,\ \forall y \geqslant 0, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x - y|\,. \qquad (1)$$

L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stable par f car $f(\mathbb{R}_+) =]0, 1] \subset \mathbb{R}_+$. Posons $\mathcal{P}_n : u_n \in \mathbb{R}_+$.
Initialisation : $\mathcal{P}_0$ est vraie.par définition de la suite u.
Hérédité : supposons que $\mathcal{P}_n$ est vrai donc $u_n \in \mathbb{R}_+$ ce qui implique que $f(u_n) \in \mathbb{R}_+$ (par stabilité de $\mathbb{R}_+$ par f) et, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$, on en déduit que $u_{n+1} \in \mathbb{R}_+$. L'hypothèse $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.Une récurrence immédiate montre que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 0$.
Puisque $\ln 2 \in \mathbb{R}_+$ et que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \in \mathbb{R}_+$, nous pouvons appliquer l'inégalité (1) avec $x = u_n$ et $y = \ln 2$. En remarquant que $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\ln 2) = \ln 2$ (d'après la question 2b), on obtient que

$$\forall n \geqslant 0, \quad |u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ln 2| \qquad (2)$$

(d) Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 0, \quad |u_n - \ln 2| \leqslant \dfrac{\ln 2}{2^n}$.

Initialisation : $\mathcal{P}_0$ est vraie.car $|u_0 - \ln 2| = \ln 2 = \dfrac{\ln 2}{2^0}$ donc $|u_0 - \ln 2| \leqslant \dfrac{\ln 2}{2^0}$.

Hérédité : supposons que $\mathcal{P}_n$ est vrai donc $|u_n - \ln 2| \leqslant \dfrac{\ln 2}{2^n}$. L'inégalité précédente combinée à la majoration 2 montre que

$$|u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ln 2| \leqslant \frac{1}{2}.\frac{\ln 2}{2^n} = \frac{\ln 2}{2^{n+1}}.$$

L'hypothèse $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie, ce qui achève la récurrence.
En remarquant que $0 \leqslant |u_n - \ln 2| \leqslant \dfrac{\ln 2}{2^n}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln 2}{2^n} = 0$, on peut appliquer le théorème d'encadrement donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ln 2| = 0$ ce qui nous démontre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.