Exercice 1

1. (a) $a_0 = p(A_0) = 1$, $b_0 = s_0 = 0$. On introduit le système complet d'évènements (A_0, B_0, S_0) ce qui nous donne

$$\begin{aligned} a_1 &= P(A_1) = P(A_0 \cap A_1) + P(B_0 \cap A_1) + P(S_0 \cap A_1) \\ &= P(A_0)P_{A_0}(A_1) + P(B_0)P_{B_0}(A_1) + P(S_0)P_{S_0}(A_1) \\ &= 1 \times \frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Par la même méthode, on obtient $b_1 = 1 \times \frac{2}{3} + 0 + 0 = \frac{2}{3}$ et $s_1 = 1 \times 0 + 0 + 0 = 0$.

2. $P_{A_2}(B_1) = \dfrac{P_{B_1}(A_2)P(B_1)}{P(A_2)} = \dfrac{\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}}{P(A_2)}$. On introduit le système complet d'évènements (A_1, B_1, S_1) ce qui nous donne

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2) + P(S_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(B_1)P_{B_1}(A_2) + P(S_1)P_{S_1}(A_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + 0 = \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $P_{A_2}(B_1) = \dfrac{\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}}{\frac{5}{18}} = \dfrac{3}{5}$

3. On introduit le système complet d'évènements (A_n, B_n, S_n) ce qui nous donne

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(S_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(S_n)P_{S_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n. \end{aligned}$$

A l'aide du même système complet, on a $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$

4. Les suites a et b sont géométriques car

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{4}b_{n+1} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{4}(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n) = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{8}b_n \\ &= \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{8}(4a_{n+1} - \frac{4}{3}a_n) = \frac{5}{6}a_{n+1} \end{aligned}$$

donc $\forall n \geqslant 1, \quad a_{n+1} = a_n$ et

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} = \frac{2}{3}(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n) + \frac{1}{2}b_{n+1} = \frac{2}{9}(\frac{3}{2}b_{n+1} - \frac{3}{4}b_n) + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{2}b_{n+1} \\ &= \frac{5}{6}b_{n+1} \end{aligned}$$

donc $\forall n \geqslant 1, \quad b_{n+1} = b_n$. On en déduit que

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = a_1(\frac{5}{6})^{n-1} = \frac{1}{3}(\frac{5}{6})^{n-1} = \frac{2}{5}(\frac{5}{6})^n \text{ et } b_n = b_1(\frac{5}{6})^{n-1} = \frac{2}{3}(\frac{5}{6})^{n-1} = \frac{4}{5}(\frac{5}{6})^n$$

5. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$ donc la guêpe ne se trouve ni dans la pièce A, ni dans la pièce B, i.e. la guêpe sort.

6. On considère le système complet d'évènements $(A_{n-1}, B_{n-1}, S_{n-1})$ et on applique la formule des probabilités totales à l'évènement S_n ce qui nous donne $\forall n \geqslant 2$, $s_n = \frac{1}{4}b_{n-1} = \frac{1}{4}\frac{4}{5}(\frac{5}{6})^n = \frac{1}{5}(\frac{5}{6})^n$

Exercice 2

– On pose D_k : "obtenir k boules noires ".

$$P(D_2) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}, P(D_1) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} \text{ et } P(D_0) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$$

– On pose E_k : "obtenir k boules noires ".

$$P(E_1) = \frac{C_1^1 \times C_4^1}{C_5^2} = \frac{4}{10} \text{ et } P(E_0) = \frac{C_4^2}{C_5^2} = \frac{6}{10}.$$

1. A_1 signifie que l'on a pioché aucune boule noire dans l'urne U_0 donc $P(A_1) = P(D_0) = \frac{3}{10}$.
B_1 signifie que l'on a pioché une boule noire dans l'urne U_0 donc $P(B_1) = P(D_1) = \frac{6}{10}$.
C_1 signifie que l'on a pioché deux boules noires dans l'urne U_0 donc $P(C_1) = P(D_2) = \frac{1}{10}$.

2. On considère le système complet d'évènements (A_1, B_1, C_1). La formule des probabilités totales nous donne

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2) + P(C_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(B_1)P_{B_1}(A_2) + P(C_1)P_{C_1}(A_2) \end{aligned}$$

- $P_{A_1}(A_2)$ est la probabilité d'avoir aucune boule noire dans l'urne U_2 si il n'y a aucune boule noire dans l'urne U_1 donc $P_{A_1}(A_2) = 1$.
- $P_{B_1}(A_2)$ est la probabilité d'avoir aucune boule noire dans l'urne U_2 si il y a une boule noire dans l'urne U_1. L'urne U_1 contient donc 5 boules dont 4 blanches et 1 noire (on a ajouté les deux boules piochées précédemment dans U_0) donc $P_{B_1}(A_2) = P(E_0) = \dfrac{6}{10}$.
- $P_{C_1}(A_2)$ est la probabilité d'avoir aucune boule noire dans l'urne U_2 si il y a deux boules noires dans l'urne U_1. L'urne U_1 contient donc 5 boules dont 3 blanches et 2 noires donc $P_{C_1}(A_2) = P(D_0) = \dfrac{3}{10}$

On en déduit que $P(A_2) = \dfrac{3}{10} \times 1 + \dfrac{6}{10} \times \dfrac{6}{10} + \dfrac{1}{10} \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{69}{100}$.

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap B_2) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(B_2) + P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(C_1)P_{C_1}(B_2) \end{aligned}$$

- $P_{A_1}(B_2)$ est la probabilité d'avoir une boule noire dans l'urne U_2 si il n'y a aucune boule noire dans l'urne U_1 donc $P_{A_1}(B_2) = 0$.
- $P_{B_1}(B_2)$ est la probabilité d'avoir une boule noire dans l'urne U_2 si il y a une boule noire dans l'urne U_1. L'urne U_1 contient donc 5 boules dont 4 blanches et 1 noire (on a ajouté les deux boules piochées précédemment dans U_0) donc $P_{B_1}(B_2) = P(E_1) = \dfrac{4}{10}$.
- $P_{C_1}(B_2)$ est la probabilité d'obtenir une boule noire dans l'urne U_2 si il y a deux boules noires dans l'urne U_1. L'urne U_1 contient donc 5 boules dont 3 blanches et 2 noires donc $P_{C_1}(B_2) = P(D_1) = \dfrac{6}{10}$

On en déduit que $P(B_2) = \dfrac{3}{10} \times 0 + \dfrac{6}{10} \times \dfrac{4}{10} + \dfrac{1}{10} \times \dfrac{6}{10} = \dfrac{30}{100} = \dfrac{3}{10}$

$$\begin{aligned} P(C_2) &= P(A_1 \cap C_2) + P(B_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap C_2) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(C_2) + P(B_1)P_{B_1}(C_2) + P(C_1)P_{C_1}(C_2) \end{aligned}$$

- $P_{A_1}(C_2)$ est la probabilité d'avoir deux boules noires dans l'urne U_2 si il n'y a aucune boule noire dans l'urne U_1 donc $P_{A_1}(C_2) = 0$.
- $P_{B_1}(C_2)$ est la probabilité d'avoir deux boules noires dans l'urne U_2 si il y a une boule noire dans l'urne U_1 donc $P_{B_1}(C_2) = 0$.
- $P_{C_1}(C_2)$ est la probabilité d'obtenir deux boules noires dans l'urne U_2 si il y a deux boules noires dans l'urne U_1. L'urne U_1 contient donc 5 boules dont 3 blanches et 2 noires donc $P_{C_1}(C_2) = P(D_2) = \dfrac{1}{10}$.

  On en déduit que $P(C_2) = \dfrac{3}{10} \times 0 + \dfrac{6}{10} \times 0 + \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{100}$

3. (C_k) signifie que l'on a pioché deux boules noires à chaque pioche ce qui nous donne $C_k = C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_k$.

$$\begin{aligned} P(C_k) &= P(C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_k) \\ &= P(C_1)P_{C_1}(C_2)P_{C_1 \cap C_2}(C_3)...P_{C_1 \cap ... \cap C_{k-1}}(C_k) \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times ... \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10^k} \end{aligned}$$

On peut également écrire, à l'aide du système complet (A_k, B_k, C_k), que

$$\begin{aligned} P(C_{k+1}) &= P(A_k)P_{A_k}(C_{k+1}) + P(B_k)P_{B_k}(C_{k+1}) + P(C_k)P_{C_k}(C_{k+1}) \\ &= \frac{1}{10}P(C_k) \end{aligned}$$

donc la suite $(P(C_k))_{k \geqslant 1}$ est géométrique donc $P(C_k) = (\dfrac{1}{10})^{k-1}P(C_1) = \dfrac{1}{10^k}$.

4. Encore et toujours le système complet d'évènements (A_k, B_k, C_k)

$$\begin{aligned} P(B_{k+1}) &= P(A_k)P_{A_k}(B_{k+1}) + P(B_k)P_{B_k}(B_{k+1}) + P(C_k)P_{C_k}(B_{k+1}) \\ &= \frac{6}{10}P(C_k) + \frac{4}{10}P(B_k) \end{aligned}$$

5. Récurrons donc. On pose $(\mathcal{H}_n) : P(B_n) = 2 \times (\dfrac{4}{10})^n - \dfrac{2}{10^n}$

Initialisation : $P(B_1) = \dfrac{6}{10}$ et $2 \times (\dfrac{4}{10})^1 - \dfrac{2}{10^1} = \dfrac{6}{5}$ donc $(\mathcal{H}_1)$ est vraie.

Hérédité : suposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie i.e. $P(B_n) = 2 \times (\dfrac{4}{10})^n - \dfrac{2}{10^n}$. La formule de la question précédente montre que

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= \frac{6}{10}P(C_n) + \frac{4}{10}P(B_n) = \frac{6}{10}\frac{1}{10^n} + \frac{4}{10}(2 \times (\frac{4}{10})^n - \frac{2}{10^n}) \\ &= \frac{1}{10^n}(\frac{6}{10} - \frac{8}{10}) + 2 \times (\frac{4}{10})^{n+1} = 2 \times (\frac{4}{10})^{n+1} - \frac{2}{10} \times \frac{1}{10^n} \\ &= 2 \times (\frac{4}{10})^{n+1} - \frac{2}{10^{n+1}}. \end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$.
Conclusion : $\forall n \geqslant 1, \quad (\mathcal{H}_n)$ est vraie donc

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(B_n) = 2 \times (\frac{4}{10})^n - \frac{2}{10^n}$$