Exercice 1

1. L'énoncé ne nous laisse pas le choix (P_n) : " $\alpha_n > 0$ et $\alpha_{n+1} > 0$ "
   Initialisation : (P_0) est vraie car l'énoncé affirme que $\alpha_0 = 1 > 0$ et $\alpha_1 = 8 > 0$.
   Hérédité : Supposons que (P_n) est vraie i.e. " $\alpha_n > 0$ et $\alpha_{n+1} > 0$ " et démontrons (P_{n+1}) i.e. " $\alpha_{n+1} > 0$ et $\alpha_{n+2} > 0$ ".
   On sait que $\alpha_{n+1} > 0$ (d'après (P_n) et $\underbrace{\alpha_{n+1}}_{>0}\underbrace{\alpha_n}_{>0} > 0$ donc $\alpha_{n+2} = \sqrt{\alpha_{n+1}\alpha_n} > 0$ ce qui démontre (P_{n+1}).
   Conclusion : $\forall n \geqslant 0, \quad (P_n)$ est vraie i.e. $\forall n \geqslant 0, \quad \alpha_n > 0$ et $\alpha_{n+1} > 0$ donc $\forall n \geqslant 0, \quad \alpha_n > 0$.
2. $u_{n+2} = \ln \alpha_{n+2} = \ln \sqrt{\alpha_{n+1}\alpha_n} = \dfrac{1}{2}\ln(\alpha_{n+1}\alpha_n) = \dfrac{1}{2}(\ln \alpha_{n+1} + \ln \alpha_n) = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$.
3. On introduit le polynôme caractéristique $x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$ dont les racines sont 1 et $-\dfrac{1}{2}$. Il existe donc deux réels a et b tels que $u_n = a \times 1^n + b(-\dfrac{1}{2})^n = a + b(-\dfrac{1}{2})^n$. Pour déterminer a et b, il suffit de résoudre le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{l} a + b = u_0 = \ln 1 = 0 \\ a - \dfrac{b}{2} = u_1 = \ln 8 = 3\ln 2 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} a + b = 0 \\ 3a = 6\ln 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2\ln 2 \\ b = -2\ln 2 \end{array}\right.$$
   donc $u_n = (2\ln 2)(1 - (-\dfrac{1}{2})^n)$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\ln 2$ donc $\alpha_n \to \exp(2\ln 2) = \exp(\ln 4) = 4$.

Exercice 2

1. $u_1 = \dfrac{1}{0+1} - u_0 = 1 - \ln 2, \quad u_2 = \dfrac{1}{1+1} - (1 - \ln 2) = \ln 2 - \dfrac{1}{2}, \quad u_3 = \dfrac{1}{2+1} - (\ln 2 - \dfrac{1}{2}) = \dfrac{5}{6} - \ln 2$.
2. On pose $(\mathcal{H}_n) : u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   Initialisation : $(\mathcal{H}_1)$ est vraie car $u_1 = 1 - \ln 2 \simeq 0,3$ donc $u_1 \leqslant 1$
   Hérédité : Supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie i.e. " $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ " et démontrons $(\mathcal{H}_{n+1})$ i.e. " $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ ".
   $u_n \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie.
   Conclusion : $\forall n \geqslant 0, \quad (\mathcal{H}_n)$ est vraie i.e. $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
3. L'inégalité $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ combinée au théorème d'encadrement implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4.
   (a) $w_{n+1} = (-1)^n u_{n+1} = (-1)^n(\dfrac{1}{n+1} - u_n) = \dfrac{(-1)^n}{n+1} - (-1)^n u_n \underset{-1=(-1)^{-1}}{=} \dfrac{(-1)^n}{n+1} + (-1)^{n-1}u_n = w_n + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

   (b) On pose $(\mathcal{H}_n) : w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$.

   Initialisation : $(\mathcal{H}_1)$ est vraie car $w_1 = u_1 = 1 - \ln 2 = \sum\limits_{k=1}^{1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$.

   Hérédité : Supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie i.e. " $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$ " et démontrons $(\mathcal{H}_{n+1})$ i.e. " $w_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$ ".
   $w_{n+1} = w_n + \dfrac{(-1)^n}{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 + \dfrac{(-1)^n}{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} + \dfrac{(-1)^n}{n+1} - \ln 2 = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$
   donc $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie.

   Conclusion : $\forall n \geqslant 0, \quad (\mathcal{H}_n)$ est vraie i.e. $\forall n \geqslant 0, \quad w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$.

   (c) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et la suite $((-1)^{n-1})_{n\geqslant 0}$ est bornée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{n-1}u_n = 0$ ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

Problème

1. Etude préliminaire :

   (a) On pose $(\mathcal{H}_n)$: $u_n \geqslant 1$.
   Initialisation : $(\mathcal{H}_0)$ est vraie car $u_0 = 2 \geqslant 1$.
   Hérédité : Supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie i.e. " $u_n \geqslant 1$ " et démontrons $(\mathcal{H}_{n+1})$ i.e. " $u_{n+1} \geqslant 1$ ".
   On a $u_{n+1} - 1 = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n} - 1 = \dfrac{u_n - 1}{2+u_n}$ avec $u_n - 1 \geqslant 0$ et $2 + u_n \geqslant 0$ donc $u_{n+1} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant 1$ donc $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie.
   Conclusion : $\forall n \geqslant 0, \quad (\mathcal{H}_n)$ est vraie i.e. $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 1$.

   (b) Si $u_n \to l$ alors $u_{n+1} \to l$ et $\dfrac{1+2u_n}{2+u_n} \to \dfrac{1+2l}{2+l}$ donc $l = \dfrac{1+2l}{2+l} \Leftrightarrow 2l + l^2 = 1 + 2l \Leftrightarrow l^2 = 1 \Leftrightarrow l = 1$ ou $l = -1$. On sait en outre, que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 1$ donc $l \geqslant 1$. Ainsi, si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge, elle converge vers 1.

2. Première méthode :

   (a) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \dfrac{\dfrac{1+2u_n}{2+u_n} - 1}{\dfrac{1+2u_n}{2+u_n} + 1} = \dfrac{u_n - 1}{3u_n + 3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} = \dfrac{1}{3}v_n$ donc v est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

   (b) $v_n = (\dfrac{1}{3})^n v_0 = (\dfrac{1}{3})^n.\dfrac{2-1}{2+1} = (\dfrac{1}{3})^{n+1}$. On en déduit que

   $$\frac{u_n - 1}{u_n + 1} = (\frac{1}{3})^{n+1} \Leftrightarrow (u_n - 1) = (\frac{1}{3})^{n+1}(u_n + 1) \Leftrightarrow u_n(1 - (\frac{1}{3})^{n+1}) = 1 + (\frac{1}{3})^{n+1} \Leftrightarrow u_n = \frac{1 + (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}.$$

   (c) On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\dfrac{1}{3})^{n+1} = 0$ donc $u_n \to 1$.

3. Deuxième méthode :

   (a) $f(x) = \dfrac{1+2x}{2+x} - x = \dfrac{-x^2+1}{2+x} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{2+x}$ donc on obtient aisément le tableau de signe de f.

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$2+x$		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

   (b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ et $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 1$ donc $f(u_n) - u_n \leqslant 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc décroissante.

   (c) La suite u est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers une limite l telle que $l \geqslant 1$. En outre, sa limite l vérifie l'équation $l = \dfrac{1+2l}{2+l} \Leftrightarrow\Leftrightarrow l = 1$ ou $l = -1$ donc la suite u converge vers 1.