

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 4 pages, de deux exercices indépendants et d'un problème qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Durée du devoir : 4h

Bonne chance

PROBLEME (Mixte ECRICOME 1992 et 2002)

Dans l'ensemble $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on considère le sous-ensemble

E des matrices $M(a, b)$ définies par : $M(a, b) = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$. Ainsi : $E = \{M(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

I. Structure de E .

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de E .

II. Etude d'une certaine application linéaire.

On considère l'application linéaire $f : \begin{cases} \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \\ (x, y, z) & \mapsto (y, x, z) \end{cases}$ ainsi que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ définie par

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0) \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0) \quad \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$$

On admet que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que f est une application linéaire et expliciter $\ker f$.
2. Donner la matrice A de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ (i.e. $A = \text{mat}(f, (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3))$).
3. Pour quelles valeurs de a_0 et b_0 a-t-on $A = M(a_0, b_0)$?
4. Montrer que l'espace $E_{-1}(f) = \{X \in \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \mid f(X) = -X\}$ est un espace vectoriel et en donner une base e_1 .
5. Montrer que l'espace $E_1(f) = \{X \in \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \mid f(X) = X\}$ est un espace vectoriel et en donner une base (e_2, e_3) .
6. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.
7. Ecrire la matrice B de f dans la base (e_1, e_2, e_3) (i.e. $B = \text{mat}(f, (e_1, e_2, e_3), (e_1, e_2, e_3))$).

8. Montrer que $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, expliciter P^{-1} puis vérifier que $A = PBP^{-1}$

III. Calcul de $[M(a, b)]^n$

On considère les matrices $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit QR . En déduire que Q est inversible et expliciter Q^{-1} .

2. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a $Q^{-1}M(a, b)Q = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & -a+b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$

3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $[M(a, b)]^n = Q \begin{pmatrix} (a+2b)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-a+b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)^n \end{pmatrix} Q^{-1}$

IV. Une application probabiliste.

Un distributeur de jouets distingue trois catégories de jouets :

- T : les jouets traditionnels tels que poupées, peluches ;
- M : les jouets liés à la mode inspirés directement d'un livre, un film, une émission ;
- S : les jouets scientifiques vulgarisant une technique récente.

Il estime que

- Le client qui a acheté un jouet traditionnel une année pour Noël choisira, l'année suivante, pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{2}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{4}$;
- Le client qui a acheté un jouet inspiré par la mode une année pour Noël optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{2}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{4}$;
- Le client qui a acheté un jouet scientifique une année pour Noël optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

On désigne par p_n, q_n, r_n , les parts respectives des jouets T, M, S dans les ventes du distributeur le $n^{\text{ème}}$ Noël suivant et on suppose que $p_0 = 1$, $q_0 = 0$, $r_0 = 0$.

1. A l'aide d'une formule des probabilités totales, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n, r_n .
Faire de même avec q_{n+1} et r_{n+1} .

2. Déterminer les deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = M(a, b) \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$

3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = [M(a, b)]^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. A l'aide de la question **III.3** et **III. 1**, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ r_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{cases}$$

5. Pour chaque entier n , on considère la variable X_n définie par

- $X_n = 1$ si le client a acheté un jouet à la mode à la n -ième année
- $X_n = 0$ si le client n'a pas acheté un jouet à la mode à la n -ième année.

On pose $Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

(a) Donner la loi de X_n ainsi que son espérance $E(X_n)$.

(b) Justifier que $E(Z_n) = \frac{1}{3}n + \frac{1}{10} \left[1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] + \frac{1}{18} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(Z_n)}{n}$.

(c) Que représente respectivement Z_n , $E(Z_n)$ et le quotient $\frac{E(Z_n)}{n}$? Qu'en déduit-on ?

V. Etude des matrices commutant avec $M(2, 1)$.

Avec les notations de la partie **III**, on a $Q^{-1}M(2, 1)Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On introduit également l'ensemble $\mathcal{H}_D = \{X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \text{ tel que } \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

1. Montrer que $\mathcal{H}_D$ est un espace vectoriel.

2. Montrer que $X \in \mathcal{H}_D$ si et seulement si il existe trois réels α, β, γ tels que $X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

3. Une application à l'existence de racine carrée à la matrice $M(2, 1)$.

On suppose qu'il existe $Y \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $Y^2 = M(2, 1)$. On considère la matrice $Z = Q^{-1}YQ$.

(a) Justifier que $Z^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis en déduire que $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z = Z \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Justifier l'existence de trois réels α, β, γ tels que $Z = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ et tels que

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Que peut-on dire des réels α, β, γ ? La matrice Y existe-t-elle ?

EXERCICE 1 (EDHEC 2005)

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet que la famille (J_1, J_2, J_3, J_4) est une base de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = M + (a + d)I$ où I

désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. (a) Exprimer $f(J_1)$, $f(J_2)$, $f(J_3)$, et $f(J_4)$ comme combinaisons linéaires de J_1, J_2, J_3 et J_4 .

(b) Vérifier que la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4) est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. On considère la famille $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) Montrer que (K_1, K_2, K_3, K_4) est une base de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$
- (b) Écrire la matrice D de f dans cette base (K_1, K_2, K_3, K_4) .

EXERCICE 2 (EM LYON 1998)

Soit G la fonction réelle définie par $G(x) = \int_0^x \frac{1}{t^4 + 1} dt$ ainsi que la fonction F définie par $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t^4 + 1}$.

1. Etude de la fonction G .
 - (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_G$ de G .
 - (b) Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathcal{D}_G$ et donner sa dérivée $G'(x)$.

2. Etude de la fonction F .

(a) Montrer que, pour tout réel x , l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{dt}{t^4 + 1}$ existe.

(b) Etudier le signe de F .

(c) Etudier la parité de F .

3. (a) Montrer que, pour tout réel strictement positif: $\frac{x}{16x^4 + 1} \leq F(x) \leq \frac{x}{x^4 + 1}$.

(b) En déduire les limites de F en $+\infty$ et $-\infty$.

4. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée F' .