

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 3 pages et de cinq exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Durée du devoir : 4h

Bonne chance

EXERCICE 1

La fonction logarithme népérien est notée $\ln$. Dans cet exercice, $x \in [0; 1[$.

1. (a) Montrer, pour tout N de $\mathbb{N}$ et tout t de $[0; 1[$: $\frac{1}{1-t} - \sum_{n=0}^N t^n = \frac{t^{N+1}}{1-t}$
- (b) En déduire, pour tout N de $\mathbb{N}$ et tout x de $[0; 1[$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} - \sum_{n=0}^N \int_0^x t^n dt = \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1-t} dt$$
 puis que $-\ln(1-x) - \sum_{n=0}^N \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1-t} dt$
- (c) Etablir, pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 \leq \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1-t} dt \leq \frac{1}{(N+2)(1-x)}$
- (d) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.
 En particulier, montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2$.

2. Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers ($n \in \mathbb{N}^\times$) pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.
 Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

EXERCICE 2

On considère l'application $g : \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}_+^\times \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}_+^\times, \quad g(x, y) = \frac{xe^{-x}}{y} + \frac{y}{e}$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g en tout point (x, y) de $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}_+^\times$.
2. Montrer qu'il existe un couple unique (x, y) de $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}_+^\times$ en lequel les deux dérivées partielles d'ordre 1 de g s'annulent, et calculer ce couple.
3. Est-ce que g admet un extremum ?

EXERCICE 3

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^\times, \frac{e^x - 1}{x} > 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$, puis préciser $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^\times$.
4. (a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2}$.
 (b) En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(0)$.
5. (a) Étudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = xe^x - e^x + 1$.
 (b) En déduire le signe de $g(x)$, puis dresser le tableau de variations de f (limites comprises).
6. (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = f(-x)$.
 (b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^\times$.
 (c) Déterminer l'asymptote de la courbe représentative de f en $+\infty$ ainsi que sa position relative.

EXERCICE 4

Lorsque A et B sont deux événements d'un même espace probabilisé, on désignera par $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B , où B est un événement de probabilité non nulle.

Dans cet exercice N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents.

(On peut appeler X_N le " nombre de changements " au cours des N premiers lancers).

Par exemple, si les 9 premiers lancers ont donné successivement :

Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile

alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux 3^{ième}, 4^{ième}, 5^{ième} et 8^{ième} lancers).

1. Justifier que $X_N(\Omega) = \{0, \dots, N-1\}$.
2. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance. Déterminer la loi de X_3 .
3. Montrer que $P(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $P(X_N = 1) = 2(N-1) \left(\frac{1}{2}\right)^N$.
4. (a) Justifier que pour tout entier k de $\{0, \dots, N-1\}$: $P_{X_N=k}(X_{N+1} = k) = \frac{1}{2}$
 (b) En déduire que pour tout entier k de $\{0, \dots, N-1\}$:

$$P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) = \frac{1}{2} P(X_N = k).$$

- (c) En sommant cette relation de $k = 0$ à $N-1$, montrer que $P(X_{N+1} - X_N = 0) = \frac{1}{2}$.

- (d) Justifier que $(X_{N+1} - X_N)(\Omega) = \{0, 1\}$ et donner la loi de $X_{N+1} - X_N$.

En déduire la relation $E(X_{N+1}) = \frac{1}{2} + E(X_N)$, puis donner $E(X_N)$ en fonction de N .

EXERCICE 5

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

On s'intéresse dans cet exercice à la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

I. Etude de la fonction f .

1. Dresser le tableau de variations de la fonction sh , en déduire le signe de $\operatorname{sh}(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$ et montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^\times$.
3. Démontrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$.
4. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \operatorname{sh} x - x \operatorname{ch}(x)$.
Etudier les variations de h , puis en déduire le signe de $h(x)$.
5. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$ et donner l'allure de la courbe représentative de la fonction f .

II. Etude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On donne : $f(0.8) \simeq 0.9$, $f(1) \simeq 0.85$.

1. Justifier que $f([0.8, 1]) \subset [0.8, 1]$, puis que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0.8, 1]$
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ puis que $\alpha \in [0.8, 1]$.
3. Justifier, en utilisant les questions **I.1** et **I.4**, que :

$$\forall x \in [0.8, 1], \quad \frac{h(1)}{\operatorname{sh}^2(0.8)} \leq f'(x) \leq \frac{h(0.8)}{\operatorname{sh}^2(1)}$$

4. On donne :

$$\frac{h(1)}{\operatorname{sh}^2(0.8)} \simeq -0.47 \text{ et } \frac{h(0.8)}{\operatorname{sh}^2(1)} \simeq -0.13.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq 0.5 |u_n - \alpha|$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq 0.2 (0.5)^n.$$

5. En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.