La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 3 pages et de cinq exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h **Bonne chance**

EXERCICE 1

Une urne contient 8 boules rouges, 4 boules noires et 2 boules vertes. Un joueur effectue dans cette urne des tirages d'une boule, avec remise de la boule tirée avant de tirer la suivante, jusqu'à ce qu'il obtienne soit une boule rouge, auquel cas il a gagné et le jeu s'arrête, soit une boule verte, auquel cas il a perdu et le jeu s'arrête également.
On désigne par

- X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule rouge
- Y le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte.
- Z le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule noire.
- R le nombre de tirages nécessaires pour que le joueur gagne.
- S le nombre de tirages nécessaires pour que le joueur perde.

On considère également les trois évènements
A : «le joueur gagne», B :«le joueur perd», C :«le jeu ne s'arrête jamais» (i.e. le joueur ne perd jamais et ne gagne jamais)

1. Donner la loi des variables X, Y et Z ainsi que leurs espérances et variances respectives.
2. Calculer la probabilité que le joueur gagne en au plus 4 tirages.
3. Calculer la probabilité que le joueur perde en au plus 4 tirages.
4. Calculer la probabilité que le joueur n'a ni gagné, ni perdu à l'issue des 4 premiers tirages.
5. Donner la loi de R et donner son espérance.
6. Donner la loi de S et donner son espérance.
7. Calculer la probabilité $p(A)$ que le joueur gagne (en un nombre quelconque de tirages)
8. Calculer la probabilité $p(B)$ que le joueur perde (en un nombre quelconque de tirages)
9. Calculer la probabilité $p(C)$ que le jeu ne s'arrête jamais.

EXERCICE 2

On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

I. Première partie

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier : $A^3 = A^2 + 2A$.
2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.
3. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un couple unique (a_n, b_n) de nombres réels tel que : $A^n = a_n A + b_n A^2$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
4. (a) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$
   (b) En déduire a_n et b_n en fonction de n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
   (c) Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

II. Seconde partie

1. (a) Résoudre successivement les trois équations
   $$AX = -X, \quad AX = 0_{3,1}, \quad AX = 2X$$
   où $X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Justifier que la matrice P est inversible et donner son inverse.
2. Déterminer une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$ (*on donnera ses coefficients*)

EXERCICE 3

On considère, pout tout entier n tel que $n \geqslant 1$, l'application $h_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad h_n(x) = \frac{xe^{-x}}{x^n} - x^n$$

et l'application $\varphi_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \varphi_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :
   $$\forall x \in]0; +\infty[, \quad h_n(x) = 0 \Longleftrightarrow \varphi_n(x) = 0$$
   (b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'équation $h_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée u_n, et que :
   $$0 < u_n < 1$$
2. (a) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $\ln(u_n) = -\dfrac{u_n}{2n-1}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE 4

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée (où c désigne un entier naturel non nul). On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).
On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$\boxed{Z_p \text{ désigne le nombre de boules blanches obtenues lors des } p \text{ premiers tirages.}}$$

1. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
2. Donner la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
3. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
4. Soit $p \leqslant n-1$.
   (a) Déterminer soigneusement la probabilité conditionnelle $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1}=1)$ pour $k \in [\![0, p]\!]$
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
   $$P(X_{p+1}=1) = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}.$$
   (c) Justifier que $Z_{p+1} = Z_p + X_{p+1}$ puis que $\forall p \geqslant 1, \quad E(Z_{p+1}) = \dfrac{1+(2+c+pc)E(Z_p)}{2+pc}$
   (d) Etablir que $\forall p \geqslant 1, \quad E(Z_p) = \dfrac{p}{2}$ puis donner la loi de X_{p+1}. Conclusion.

EXERCICE 5

Soit f définie sur $[0, 2[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$

1. (a) Etudier les variations de f. Préciser les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses 0 et 1.
   (b) Démontrer : $\forall x \in [0, 2[, \quad f(x) \geqslant x$. Cas d'égalité ?
2. (a) Démontrer que f réalise une bijection de $[0, 2[$ sur $[0, +\infty[$.
   (b) Sur quel intervalle f^{-1} est-elle dérivable ?
   (c) Calculer $(f^{-1})'(4)$.
   (d) Pour $b \in [0, +\infty[$, calculer l'unique réel $a \in [0, 2[$ tel que $f(a) = b$
   (e) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.
3. On considère la suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in [0, 1]$.
   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 1]$.
   (b) Prouver que la suite u est croissante.
   (c) Démontrer que la suite u converge et calculer sa limite.