La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 4 pages, de deux exercices indépendants et d'un problème qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h **Bonne chance**

Les calculs devront figurer sur la copie

EXERCICE 1 (Extrait modifié ECRICOME 2003)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Résoudre les trois systèmes suivants :

$$(E_1) : \begin{cases} 3x - 2y + 3z = x \\ x + 2z = y \\ 2z = z \end{cases} \quad (E_2) : \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 2x \\ x + 2z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \quad (E_3) : \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 2x + 2 \\ x + 2z = 2y + 1 \\ 2z = 2z \end{cases}$$

   (b) Montrer que la matrice P est inversible, calculer son inverse puis vérifier que $A = PTP^{-1}$

2. (a) Prouver que pour tout élément n de $\mathbb{N}$ il existe un réel α_n tel que : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

   On donnera la valeur de α_0 ainsi qu'une relation entre α_{n+1} et α_n

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = n2^{n-1}$

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PT^nP^{-1}$. En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n.

4. Montrer qu'une matrice M, carrée d'ordre 3 vérifie $TM = MT$ si et seulement M est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois réels.

5. Soit M une matrice carrée d'ordre 3, i.e. $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
   On considère la matrice M' définie par $M' = P^{-1}MP$.

   (a) Exprimer M en fonction de M', P et P^{-1}.
   En utilisant l'égalité précédente et l'égalité $A = PTP^{-1}$ (obtenue à la question 1.b), montrer que la matrice M vérifie l'égalité $AM = MA$ si et seulement si la matrice M' vérifie $TM' = M'T$.

   (b) En déduire que M vérifie $AM = MA$ si et seulement si il existe des réels a, b, c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} -a + 2b & 2a - 2b & -a + b + 2c \\ -a + b & 2a - b & -a + b + c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Extrait modifié ESSEC 2005)

Un mobile se déplace sur les points d'abscisse 0, 1, 2, 3 d'un axe gradué selon les règles suivantes :

- à l'instant 0, il se trouve en un des points d'abscisse 0, 1, 2, 3;
- à l'intant n ($n \in \mathbb{N}$), si le mobile est au point d'abscisse 1, alors il se trouve à l'instant $(n+1)$ au point d'abscisse 2 avec la probabilité $\frac{1}{3}$, et au point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{2}{3}$;
- à l'intant n ($n \in \mathbb{N}$), si le mobile est au point d'abscisse 2, alors il se trouve à l'instant $(n+1)$ au point d'abscisse 3 avec la probabilité $\frac{2}{3}$, et au point d'abscisse 1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$;
- à l'intant n ($n \in \mathbb{N}$), si le mobile se trouve à l'origine, il reste à l'origine à l'instant suivant;
- à l'intant n ($n \in \mathbb{N}$), si le mobile se trouve au point d'abscisse 3, il reste en ce point à l'instant suivant.

On considère les quatre évènements A_n, B_n, C_n, D_n ainsi que les quatre réels a_n, b_n, c_n, d_n définis par :

- A_n : «le mobile se trouve au point d'abscisse 0 à l'instant n » et $a_n = P(A_n)$
- B_n : « le mobile se trouve au point d'abscisse 1 à l'instant n » et $b_n = P(B_n)$
- C_n : « le mobile se trouve au point d'abscisse 2 à l'instant n » et $c_n = P(C_n)$
- D_n : « le mobile se trouve au point d'abscisse 3 à l'instant n » et $d_n = P(D_n)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice-colonne U_n par : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$ et on pose $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

1. Exprimer a_{n+1} (resp. b_{n+1}, resp. c_{n+1}, resp. d_{n+1}) en fonction de a_n, b_n, c_n, d_n.
2. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = MU_n$ puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = M^n U_0$.
3. On considère les trois matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$

   $\boxed{\text{On admet que } A^2 = A, \quad B^2 = B, \quad C^2 = C, \quad AB = BA = AC = CA = BC = CB = 0_3}$

   (a) Déterminer trois réels a, b, c tels que $M = aA + bB + cC$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = a^n A + b^n B + c^n C$ puis donner les 16 coefficients de M^n.
4. Donner la valeur des suites a_n, b_n, c_n, d_n ainsi que leurs limites respectives en fonction de a_0, b_0, c_0, d_0. On vérifiera en particulier que si $a_0 = c_0 = d_0 = 0$ et $b_0 = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{3}{4}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = \frac{1}{4}$.

PROBLEME (Extrait modifié ESSEC 2004)

I. Calcul matriciel

Pour tout réel a, on considère les matrices

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & (1-a)^2 & (1-a)^3 \\ 0 & a & 2a(1-a) & 3a(1-a)^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^2(1-a) \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}, \qquad D(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^2 et donner l'inverse de P.
2. Vérifier que $\forall a \in \mathbb{R}, \quad M(a) = PD(a)P^{-1}$.
3. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad M(a)M(b) = M(ab)$.
4. En déduire que $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad [M(a)]^n = M(a^n)$.
5. Comment choisir $c \in \mathbb{R}$ pour que $M(c) = I$?
   Montrer que si $a \neq 0$, il existe un réel b tel que $M(a)M(b) = I$. En déduire l'inverse de $M(a)$.
   La matrice $M(0)$ est-elle inversible ?

II. Etude d'une expérience aléatoire

On dispose de 3 pièces de monnaie, chacune ayant la probabilité p d'amener pile ($0 < p < 1$) et $1-p$ d'amener face. On pourra poser : $q = 1-p$.
On s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer des lancers successifs selon le protocole suivant :

- à l'étape 1, on lance les 3 pièces ;
- à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 1 (s'il en existe) ;
- à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 2 (s'il en existe),
- à l'étape 4, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 3 (s'il en existe),

et ainsi de suite.
À chaque étape, les lancers des pièces sont supposés indépendants.
On considère les évènements :

A_n : « obtenir 0 pile à l'étape n » B_n : « obtenir 1 pile à l'étape n »
C_n : « obtenir 2 piles à l'étape n » D_n : « obtenir 3 piles à l'étape n ».

On pose les deux conventions suivantes :

- L'évènement D_0 est l'évènement certain et les trois évènements A_0, B_0, C_0 sont impossibles.
- si à une certaine étape n_0 aucun côté pile n'apparaît, on considère que pour tous les entiers n supérieurs ou égaux à n_0 l'événement A_n est réalisé.

1. Calculer les quatre probabilités $P(A_1), P(B_1), P(C_1)$ et $P(D_1)$.

2. Pour tout entier naturel n, calculer très soigneusement les 16 probabilités conditionnelles

$$\begin{array}{cccc}
P_{A_n}(A_{n+1}) & P_{B_n}(A_{n+1}) & P_{C_n}(A_{n+1}) & P_{D_n}(A_{n+1}) \\
P_{A_n}(B_{n+1}) & P_{B_n}(B_{n+1}) & P_{C_n}(B_{n+1}) & P_{D_n}(B_{n+1}) \\
P_{A_n}(C_{n+1}) & P_{B_n}(C_{n+1}) & P_{C_n}(C_{n+1}) & P_{D_n}(D_{n+1}) \\
P_{A_n}(D_{n+1}) & P_{B_n}(D_{n+1}) & P_{C_n}(D_{n+1}) & P_{D_n}(D_{n+1})
\end{array}$$

   Les calculs devront figurer sur la copie.

3. A l'aide d'une formule de probabilité totale, exprimer $P(A_{n+1})$ (resp. $P(B_{n+1})$, resp. $P(C_{n+1})$, resp. $P(D_{n+1})$) en fonction des probabilités $P(A_n), P(B_n), P(C_n), P(D_n)$.

4. Pour tout entier naturel n, on considère la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \\ P(D_n) \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer une matrice M carrée d'ordre 4 telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = MU_n$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = M^n U_0$.

   (c) A l'aide de la question 4 de la partie I, calculer les 4 coefficients de U_n.

   On n'oubliera pas que l'on a, par convention, $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$