

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 3 pages, de cinq exercices indépendants et d'un problème qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1

On considère alors une suite $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, z_{n+1} = \frac{z_n + z_{n-1}}{6} \quad \text{avec} \quad z_0 \in \mathbb{R} \text{ et } z_1 \in \mathbb{R}.$$

Calculer z_n en fonction de n , z_0 et z_1 . .

Exercice 2

On considère les suites u et v définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{4n-1}.$$

Montrer que les suites u et v sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers une même limite L . Calculer u_1, u_2, v_1, v_2 et en déduire un encadrement de L .

Exercice 3

On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2(u_n)^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1}.$$

1. On suppose dans cette question que $u_0 \in \mathbb{R}_+$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0$.

(b) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n + \frac{1}{2}$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_0 + \frac{n}{2}$.

(c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

2. On suppose dans cette question que $u_0 \leq -1$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq -1$.

(b) Etudier la monotonie de la suite u puis justifier la convergence de la suite u .

(c) Calculer la limite de cette suite.

Exercice 4

On considère la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{7u_n + 3}{2u_n + 6}$ et $u_0 \in \mathbb{R}_+$.

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{7x + 3}{2x + 6} - \left[\frac{3}{2} + \frac{4}{9} \left(x - \frac{3}{2} \right) \right]$
 - (a) Calculer $f\left(\frac{3}{2}\right)$, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = \frac{(3 - 2x)(15 + 2x)}{9(x + 3)^2}$.
 - (b) A l'aide du tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$, en déduire que $\forall x \geq 0, \quad \frac{7x + 3}{2x + 6} \leq \frac{3}{2} + \frac{4}{9} \left(x - \frac{3}{2} \right)$.

2. On suppose dans cette question que $u_0 \in \left[0, \frac{3}{2} \right]$.

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[0, \frac{3}{2} \right]$.
- (b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n + 1)(3 - 2u_n)}{2u_n + 6}$.
- (c) Justifier la convergence de la suite u et donner sa limite.

3. On suppose dans cette question que $u_0 \geq \frac{3}{2}$.

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq \frac{3}{2}$.
- (b) A l'aide de la question 1, justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq \frac{3}{2} + \frac{4}{9} \left(u_n - \frac{3}{2} \right)$.
- (c) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{3}{2} \leq u_n \leq \frac{3}{2} + \left(\frac{4}{9} \right)^n \left(u_0 - \frac{3}{2} \right)$.
- (d) En déduire que la suite u est convergente et donner sa limite.

Exercice 5

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 6x + 1}{9}$

et l'on définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ en posant : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{(u_n)^3 + 6u_n + 1}{9}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2} \right]$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$.

En déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2} \right]$.

3. Montrer que $\forall x \in [0, \alpha], \quad x \leq f(x)$.
4. Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \alpha$.
5. A l'aide de la question 3, donner la monotonie de la suite u .
6. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge et justifier que sa limite est α .

PROBLEME

On considère les suites u , v et w définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad u_n = \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - \ln(n) \quad , \quad v_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \frac{w_n}{w_n^2 + w_n + 1} \end{cases}$$

On admet l'encadrement suivant $(E) : \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \ln(n+2) - \ln(n+1) \leq \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n$.

1. Etude de la suite u .

- (a) Donner la monotonie de la suite u .
- (b) Montrer par récurrence que $\forall n \geq 1, \quad \ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq 1 + \ln(n)$.
- (c) Montrer que la suite u est comprise entre 0 et 1.
- (d) En déduire la convergence de la suite u (on ne demande pas de calculer cette limite).

2. Etude de la suite v .

- (a) Etudier la monotonie de la suite v .
- (b) En majorant $\frac{1}{p}$, justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad v_n \leq \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1}$.
- (c) Calculer $\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1}$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad v_n \leq 1$.
- (d) Justifier que la suite v converge et donner une majoration de sa limite.
- (e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad u_{2n} - u_n = v_n - \ln 2$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln 2$.

3. Etude de la suite w .

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq w_n \leq 1$.
- (b) Donner la monotonie de la suite w . En déduire la convergence de la suite w et donner sa limite.

4. Etude asymptotique de la suite w .

- (a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{w_{n+1}} = w_n + 1 + \frac{1}{w_n}$.
- (b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{w_n} \geq n + 1$.
- (c) En combinant les questions 4.a) et 4.b), établir alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \frac{1}{w_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

- (d) En utilisant la question 1.b), justifier que $\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{w_n} \leq n + 2 + \ln(n)$.
- (e) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \frac{1}{n + 2 + \ln n} \leq w_n \leq \frac{1}{n + 1}$.
- (f) Calculer les limites suivantes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n + 2 + \ln n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n + 1}$.
En déduire que la suite $(nw_n)_n$ est convergente et donner sa limite.