La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 1 page et de quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 3h

Bonne chance

Exercice 1 (ECRICOME 1995)
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = x^3 + 5x - 1$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $x^3 + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Etablir que $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 (ECRICOME 1999)
On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $U = \left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right[\times]0,1[$ et f l'application définie sur U par :

$$f : (x,y) \to f(x,y) = x^2 - x + xy^2 - xy$$

1. Calculer les dérivées partielles du premier ordre et du second ordre.
2. Expliciter les points critiques de f sur l'ouvert U.
3. Montrer que f admet un unique extremum sur U et que celui-ci est un minimum dont on donnera la valeur.

Exercice 3 (EDHEC 2004)
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = x \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1. (a) Montrer que f est continue en 0.
   (b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
2. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
   Pour tout réel x non nul, calculer $f'(x)$ puis étudier son signe.
   (b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 4 (EML 1997)
1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto \dfrac{1+x}{1+e^x} - x$.
   (a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa dérivée sous la forme $g'(x) = \dfrac{h(x)}{(1+e^x)^2}$.
   (b) Après avoir écrit $g(x)$ sous la forme d'un quotient, déterminer les asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$ de la courbe représentative de g.
2. Montrer que l'équation $\dfrac{1+x}{1+e^x} = x$ admet une solution et une seule sur $\mathbb{R}_+$.On note x_0 cette solution.
3. Justifier que $0 < x_0 < 1$.