

CORRECTION PROBLEME

I. Structure de E .

1. Etant donné que l'on demande également une base, on va directement montrer que E est engendré linéairement par certains vecteurs.

$X \in E$ si et seulement il existe deux réels a et b tels que

$$X \in E \Leftrightarrow \text{il existe deux réels } a, b \text{ tels que } X = M(a, b) = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow E = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Par conséquent, E est un espace vectoriel

2. La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est génératrice de E . Montrons qu'il s'agit d'une famille libre de E . Soient a et b deux réels tels que

$$a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = 0$$

Par conséquent, la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est bien une base de E .

II. Etude d'une certaine application linéaire.

1. Soient α, β deux réels et $X = (x, y, z)$ et $Y = (a, b, c)$ deux vecteurs de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f(\alpha X + \beta Y) &= f(\alpha(x, y, z) + \beta(a, b, c)) = f(\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b, \alpha z + \beta c) \\ &= (\alpha y + \beta b, \alpha x + \beta a, \alpha z + \beta c) \quad ("x = \alpha x + \beta a, \quad y = \alpha y + \beta b, \quad z = \alpha z + \beta c") \\ &= \alpha(y, x, z) + \beta(b, a, c) = \alpha f(X) + \beta f(Y) \end{aligned}$$

2. Il s'agit d'exprimer les images de chaque vecteur de la base de l'espace de départ ($f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)$ ici) comme combinaison linéaire des vecteurs de la base de l'espace d'arrivée ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ici) donc il s'agit d'exprimer $f(\varepsilon_1)$ (resp. $f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)$) comme combinaison linéaire de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1) &= f(1, 0, 0) = (0, 1, 0) = \varepsilon_2 = 0 \times \varepsilon_1 + 1 \times \varepsilon_2 + 0 \times \varepsilon_3 \\ f(\varepsilon_2) &= f(0, 1, 0) = (1, 0, 0) = \varepsilon_1 = 1 \times \varepsilon_1 + 0 \times \varepsilon_2 + 0 \times \varepsilon_3 \\ f(\varepsilon_3) &= f(0, 0, 1) = (0, 0, 1) = \varepsilon_3 = 0 \times \varepsilon_1 + 0 \times \varepsilon_2 + 1 \times \varepsilon_3 \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$A = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{matrix}$$

3. Il est immédiat que $A = M(1, 0)$.

4. Etant donné que l'on demande également une base, on va directement montrer que E est engendré linéairement par certains vecteurs.

$$X \in E_{-1}(f) \Leftrightarrow X = (a, b, c) \text{ et } f(X) = -X \Leftrightarrow (b, a, c) = -(a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ a = -b \\ c = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + b = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = (-b, b, 0) = b(-1, 1, 0) \Leftrightarrow E_{-1}(f) = \text{Vect}((-1, 1, 0))$$

Par conséquent, $E_{-1}(f)$ est un espace vectoriel (comme espace engendré par certains vecteurs) et $e_1 = (-1, 1, 0)$ en est une base (unique vecteur générateur et il est non nul)

5. On procède de la même façon

$$\begin{aligned}
 X \in E_{-1}(f) &\Leftrightarrow X = (a, b, c) \text{ et } f(X) = X \Leftrightarrow (b, a, c) = (a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ a = b \\ c = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ a - b = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \text{«Pivot pour } a\text{»} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \{ a = b \Leftrightarrow X = (b, b, c) = b(1, 1, 0) + c(0, 0, 1) \} \\
 &\Leftrightarrow E_1(f) = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))
 \end{aligned}$$

Par conséquent, $E_1(f)$ est un espace vectoriel (comme espace engendré par certains vecteurs) et $\{e_2 = (1, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ en est une famille génératrice. Il reste à montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Soient a et b deux réels tels que

$$ae_2 + be_3 = 0_{\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow a(1, 1, 0) + b(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (a, a, b) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow a = b = 0$$

On en déduit que la famille (e_2, e_3) est une base de $E_1(f)$.

6. Commençons par montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Soient a, b, c trois réels tels que

$$\begin{aligned}
 ae_1 + be_2 + ce_3 &= 0_{\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow a(-1, 1, 0) + b(1, 1, 0) + c(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \\
 \Leftrightarrow (-a + b, a + b, c) &= (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ 2b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \text{«Pivot pour } a\text{»} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

donc la famille (e_1, e_2, e_3) est bien libre.

Montrons qu'il s'agit d'une famille génératrice. Soit $X = (x, y, z) \in \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$, existe-t-il trois réels a, b, c tels que

$$X = ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow (x, y, z) = a(-1, 1, 0) + b(1, 1, 0) + c(0, 0, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = x \\ a + b = y \\ c = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = x \\ 2b = x + y \\ c = z \end{cases} \left| \begin{array}{l} \text{«Pivot pour } a\text{»} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right.$$

Par conséquent, on en déduit l'existence de c puis de b et enfin celui de a , ce qui entraîne que les réels a, b, c existent bien. Ainsi, la famille (e_1, e_2, e_3) est génératrice et libre donc c'est une base de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$

7. Il s'agit d'exprimer les images de chaque vecteur de la base de l'espace de départ ($f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ ici) comme combinaison linéaire des vecteurs de la base de l'espace d'arrivée (e_1, e_2, e_3 ici) donc il s'agit d'exprimer $f(e_1)$ (resp. $f(e_2), f(e_3)$) comme combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3 . Puisque e_1 appartient à $E_{-1}(f)$, on a $f(e_1) = -e_1$ (il est solution de $f(X) = -X$) et comme e_2, e_3 appartiennent à $E_1(f)$, on en déduit que $f(e_2) = e_2$ et $f(e_3) = e_3$, ce qui entraîne

$$B = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

8. On procède par les opérations élémentaires sur les matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{«Pivot»} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right.$$

La nouvelle matrice est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc elle est inversible, ce qui implique l'inversibilité de P . On poursuit en effectuant le pivot inversé.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \end{array} \right.$$

$$\text{Par conséquent, on a } P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Vérification : } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$\text{Un calcul direct nous donne } PB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

III. Calcul de $[M(a, b)]^n$

1. Un calcul direct donne $QR = 6I_3$ donc $Q\left(\frac{1}{6}R\right) = I_3$, ce qui entraîne que Q est inversible et $Q^{-1} = \frac{1}{6}R$.
2. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} Q^{-1}M(a, b) &= \frac{1}{6}RM(a, b) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2a+4b & 2a+4b & 2a+4b \\ -3a+3b & 3a-3b & 0 \\ a-b & a-b & -2a+2b \end{pmatrix} \\ Q^{-1}M(a, b)Q &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6a+12b & 0 & 0 \\ 0 & -6a+6b & 0 \\ 0 & 0 & 6a-6b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & -a+b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Une récurrence archi-classique, que le lecteur fera, montre la formule demandée.

IV. Une application probabiliste.

1. L'achat une année donnée dépendant de l'achat effectué l'année précédente, nous incite à introduire les événements T_n : «acheter un jouet traditionnel l'année n », M_n : «acheter un jouet à la mode l'année n », S_n : «acheter un jouet scientifique l'année n ». On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements T_n, M_n, S_n , ce qui nous donne

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(T_{n+1}) = P(T_n \cap T_{n+1}) + P(M_n \cap T_{n+1}) + P(S_n \cap T_{n+1}) \\ &= P(T_n)P_{(T_n)}(T_{n+1}) + P(M_n)P_{(M_n)}(T_{n+1}) + P(S_n)P_{(S_n)}(T_{n+1}) \\ &= \frac{1}{4}P(T_n) + \frac{1}{2}P(M_n) + \frac{1}{4}P(S_n) = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ q_{n+1} &= P(M_{n+1}) = P(T_n \cap M_{n+1}) + P(M_n \cap M_{n+1}) + P(S_n \cap M_{n+1}) \\ &= P(T_n)P_{(T_n)}(M_{n+1}) + P(M_n)P_{(M_n)}(M_{n+1}) + P(S_n)P_{(S_n)}(M_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}P(T_n) + \frac{1}{4}P(M_n) + \frac{1}{4}P(S_n) = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ r_{n+1} &= P(S_{n+1}) = P(T_n \cap S_{n+1}) + P(M_n \cap S_{n+1}) + P(S_n \cap S_{n+1}) \\ &= P(T_n)P_{(T_n)}(S_{n+1}) + P(M_n)P_{(M_n)}(S_{n+1}) + P(S_n)P_{(S_n)}(S_{n+1}) \\ &= \frac{1}{4}P(T_n) + \frac{1}{4}P(M_n) + \frac{1}{2}P(S_n) = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n \end{aligned}$$

$$2. \text{ Il est immédiat que } \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

3. Une récurrence archi-classique, que le lecteur fera, montre la formule demandée.
4. La question précédente combinée aux questions III.3 et III. 1, nous donne

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}}_{\text{matrice diagonale}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{matrice constante}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 & -\left(-\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 & 0 & -2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2+3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 2-3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ -2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ r_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{cases} \end{aligned}$$

5. (a) Par construction, on a $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$P(X_n = 1) = P(M_n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad P(X_n = 0) = 1 - P(X_n = 1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$E(X_n) = 0 \times P(X_n = 0) + 1 \times P(X_n = 1) = P(X_n = 1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

(b) On utilise la linéarité de l'espérance, ainsi que la formule $\sum_{k=1}^n q^k = \sum_{j=k-1}^{n-1} q^{j+1} = q \sum_{j=0}^{n-1} q^j = q \times \frac{1-q^n}{1-q}$

$$E(Z_n) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^k + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^k \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{3}n - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right) \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}n - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right) \left(\frac{4}{5}\right) \left[1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{4}{3}\right) \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{3}n + \frac{1}{10} \left[1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] + \frac{1}{18} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

$$\frac{E(Z_n)}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10n} \left[1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] + \frac{1}{18n} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \text{ (par les croissances comparées)}$$

(c) La variable Z_n représente le nombre de jouets à la mode acheté par un client durant des n premières années
 $E(Z_n)$ représente le nombre moyen de jouets à la mode acheté par un client durant des n premières années
 $\frac{E(Z_n)}{n}$ représente le nombre moyen de jouets à la mode acheté par année par un client durant les n premières années.

La limite obtenue à la question précédente montre que chaque client achète, en moyenne, $\frac{1}{3}$ de jouets à la mode chaque année.

V. Etude des matrices commutant avec $M(2, 1)$.

1. On procède par la caractérisation des sous-espaces vectoriels.

$\mathcal{H}_D \subset \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel et $\mathcal{H}_D \neq \emptyset$ puisqu'il contient 0_3 (l'élément nul de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$) car $0_3 \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_3$

$$\left[\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} 0_3 = 0_3 \quad \text{et} \quad 0_3 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_3 \right] \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} 0_3 = 0_3 \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stabilité par combinaison linéaire : Soient X et X' deux éléments de $\mathcal{H}_D$ ainsi que deux réels λ et μ . Il faut montrer que $\lambda X + \mu X' \in \mathcal{H}_D$, c'est-à-dire que soient $X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X' \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

avec $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X' = X' \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, il faut montrer que $\lambda X + \mu X' \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\lambda X + \mu X') = (\lambda X + \mu X') \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour cela, nous allons développer puis de regrouper les termes en λ et les termes en μ

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\lambda X + \mu X') &= \lambda \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + \mu \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X' \\ &= \lambda X \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu X' \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda X + \mu X') \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{H}_D$ est stable par combinaison linéaire et $\mathcal{H}_D$ est bien un espace vectoriel.

Remarque : nous n'utilisons pas les coordonnées car l'ensemble $\mathcal{H}_D$ est défini par des relations sur l'élément X directement.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_D$

$$\begin{aligned} DX &= XD \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & -b & c \\ 4d & -e & f \\ 4g & -h & i \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 4a & -f = f \\ 4b = -b & g = 4g \\ 4c = c & h = -h \\ -d = 4d & i = i \\ -e = -e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 & -2f = 0 \\ 5b = 0 & -3g = 0 \\ c = 0 & 2h = 0 \\ -5d = 0 & 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 & f = 0 \\ c = 0 & g = 0 \\ d = 0 & h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

:::

3. (a) On a $Z^2 = (Q^{-1}YQ)^2 = Q^{-1}Y \underbrace{QQ^{-1}}_{=I} YQ = Q^{-1}Y^2Q = QM(2,1)Q^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d'après le rappel de cette partie).

On en déduit que $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z = Z^2 Z = Z^3 = Z Z^2 = Z \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) D'après l'égalité $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z = Z \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on est en droit d'appliquer le résultat de la question 2, ce qui

entraîne l'existence de trois réels α, β, γ tels que $Z = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ et comme $Z^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on en déduit

que $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 4 \\ \beta^2 = -1 \\ \gamma^2 = 1 \end{cases}$

Comme l'équation $\beta^2 = -1$ est impossible, on en déduit que la matrice Z n'existe pas, ce qui entraîne l'inexistence

de la matrice Y , autrement dit, la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne possède pas de racine carrée.

CORRECTION EXERCICE 1 (EDHEC 2005)

1. Soient α, β deux réels et $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. On va calculer $f(\alpha X + \beta Y)$ puis on va «séparer la partie en α de la partie en β »

$$\begin{aligned} f(\alpha X + \beta Y) &= f\left(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix} + [(\alpha a + \beta a') + (\alpha d + \beta d')] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ ("M &= \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix}, \quad "a = \alpha a + \beta a', \quad d = \alpha d + \beta d') \\ &= \alpha \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (a + d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] + \beta \left[\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + (a' + d') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \alpha f(X) + \beta f(Y) \end{aligned}$$

2. (a) Un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned} f(J_1) &= f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (1+0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2J_1 + J_4 \\ f(J_2) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (0+0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_2 \\ f(J_3) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (0+0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_3 \\ f(J_4) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (0+1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = J_1 + 4J_4 \end{aligned}$$

- (b) Il s'agit d'exprimer les images de chaque vecteur de la base de l'espace de départ ($f(J_1), f(J_2), f(J_3), f(J_4)$ ici) comme combinaison linéaire des vecteurs de la base de l'espace d'arrivée (J_1, J_2, J_3, J_4 ici). D'après la question précédente, on a

$$A = \begin{pmatrix} f(J_1) & f(J_2) & f(J_3) & f(J_4) \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

3. (a) Commençons par montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Soient a, b, c, d quatre réels tels que

$$\begin{aligned} aK_1 + bK_2 + cK_3 + dK_4 = 0_{\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})} &\Leftrightarrow a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+d & b \\ c & -a+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} a+d=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ -a+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+d=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ 2d=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \text{«Pivot pour } a\text{»} \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc la famille (K_1, K_2, K_3, K_4) est bien libre.

Montrons qu'il s'agit d'une famille génératrice. Soit $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, existe-t-il quatre réels a, b, c, d tels que

$$\begin{aligned} X &= aK_1 + bK_2 + cK_3 + dK_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b \\ c & -a+d \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} a+d=x \\ b=y \\ c=z \\ -a+d=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+d=x \\ b=y \\ c=z \\ 2d=t \end{cases} \left| \begin{array}{l} \text{«Pivot pour } a\text{»} \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit l'existence de b, c , puis d et enfin celui de a , ce qui entraîne que les réels a, b, c, d existent bien. Ainsi, la famille (K_1, K_2, K_3, K_4) est génératrice et libre donc c'est une base de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

- (b) Il s'agit d'exprimer les images de chaque vecteur de la base de l'espace de départ ($f(K_1), f(K_2), f(K_3), f(K_4)$ ici) comme combinaison linéaire des vecteurs de la base de l'espace d'arrivée (K_1, K_2, K_3, K_4 ici). On commence par calculer ces différentes images

$$f(K_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (1 + (-1)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = K_1$$

$$f(K_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (0 + 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = K_2$$

$$f(K_3) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (0 + 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = K_3$$

$$f(K_4) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 + 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3K_4$$

On en déduit immédiatement que

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(K_1) & f(K_2) & f(K_3) & f(K_4) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

CORRECTION EXERCICE 2 (EM LYON 1998)

1. (a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ (quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) et $0 \in]-\infty, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{t^4 + 1} dt = G(x)$ est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$. Par conséquent, la fonction G est définie sur $\mathbb{R}$.
- (b) On l'a répondu à cette question à la question 1.a)

2. (a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. On doit exiger que x et $2x$ appartiennent à $] - \infty, +\infty[$ (au même intervalle, mais il n'y en a qu'un ici), ce qui est toujours vraie, donc l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{t^4 + 1} dt$ existe pour tout réel x .

- (b) **Premier cas** $2x \geq x \Leftrightarrow x \geq 0$ (bornes dans l'ordre croissant). La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4 + 1}$ est positive $\mathbb{R}_+$ donc sur $[x, 2x] \subset \mathbb{R}_+$. En outre, l'intégration portant sur des bornes croissantes ($2x \geq x$), on en déduit que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{t^4 + 1} dt = F(x)$ est positive

Second cas $2x \leq x \Leftrightarrow x \leq 0$ (bornes dans l'ordre décroissant). On commence par utiliser la relation de Chasles

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t^4 + 1} dt = - \int_{2x}^x \frac{1}{t^4 + 1} dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4 + 1}$ est positive sur $\mathbb{R}_-$ donc sur $[2x, x] \subset \mathbb{R}_-$. En outre, l'intégration dans l'intégrale $\int_{2x}^x \frac{1}{t^4 + 1} dt$

portant sur des bornes croissantes ($2x \leq x$), on en déduit que l'intégrale $\int_{2x}^x \frac{1}{t^4 + 1} dt$ est positive, ce qui implique

que $F(x) = - \int_{2x}^x \frac{1}{t^4 + 1} dt$ est négative.

Par conséquent, la fonction F est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.

- (c) Pour commencer, l'ensemble de définition de F , qui est $\mathbb{R}$, est symétrique par rapport à 0. Ensuite, en utilisant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $F(-x)$, on obtient

$$F(-x) = \int_{(-x)}^{2(-x)} \frac{1}{t^4 + 1} dt = \int_x^{2x} \frac{1}{(-u)^4 + 1} (-du) = - \int_x^{2x} \frac{1}{u^4 + 1} du = -F(x)$$

donc la fonction F est impaire.

3. (a) On encadre "à la main" la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4 + 1}$ sur l'intervalle $[x, 2x]$ lorsque $x > 0$.

$$\begin{aligned} x &\leq t \leq 2x \Rightarrow x^4 \leq t^4 \leq 16x^4 \Rightarrow x^4 + 1 \leq t^4 + 1 \leq 16x^4 + 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{16x^4 + 1} &\leq \frac{1}{t^4 + 1} \leq \frac{1}{x^4 + 1} \quad \forall t \in [x, 2x] \end{aligned}$$

Puisque $x \leq 2x$ (car $x > 0$), en intégrant l'inégalité précédente sur $[x, 2x]$ (l'intégration portant sur des bornes croissantes), on obtient

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} \frac{dt}{16x^4 + 1} &\leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^4 + 1} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{x^4 + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{16x^4 + 1} \int_x^{2x} 1 dt \leq F(x) \leq \frac{1}{x^4 + 1} \int_x^{2x} 1 dt \\ \Leftrightarrow \frac{1}{16x^4 + 1} [t]_{t=x}^{t=2x} &\leq F(x) \leq \frac{1}{x^4 + 1} [t]_{t=x}^{t=2x} \Leftrightarrow \frac{x}{16x^4 + 1} \leq F(x) \leq \frac{x}{x^4 + 1} \end{aligned}$$

- (b) Puisque l'on a l'encadrement $\forall x \geq 0, \quad \frac{x}{16x^4 + 1} \leq F(x) \leq \frac{x}{x^4 + 1}$ et

$$\begin{aligned} \frac{x}{16x^4 + 1} &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{16x^4} = \frac{1}{16x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{16x^4 + 1} = 0 \\ \frac{x}{x^4 + 1} &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^4 + 1} = 0, \end{aligned}$$

le théorème d'encadrement montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$. Par imparité, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -0 = 0$.

- (c) On commence par remarquer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t^4 + 1} = \int_0^{2x} \frac{dt}{t^4 + 1} - \int_0^x \frac{dt}{t^4 + 1} = G(2x) - G(x)$$

La fonction G étant dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que la fonction $x \mapsto 2x$, on en déduit que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = (G(2x))' - (G(x))' = (2x)'G'(2x) - G'(x) = 2 \times \frac{1}{(2x)^4 + 1} - \frac{1}{x^4 + 1} = \frac{2}{16x^4 + 1} - \frac{1}{x^4 + 1}$$