

correction de l'exercice 1

$$1. (a) \frac{1}{1-t} - \sum_{n=0} t^n = \frac{1}{1-t} - \frac{1-t^{N+1}}{1-t} = \frac{t^{N+1}}{1-t}$$

(b) On intègre l'égalité précédente sur l'intervalle $[0, x]$, et en utilisant la linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \left(\sum_{n=0}^N t^n \right) dt &= \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1-t} dt \Leftrightarrow \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \sum_{n=0}^N \int_0^x t^n dt = \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1-t} dt \\ \Leftrightarrow \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \sum_{n=0}^N \frac{x^{n+1}}{n+1} &= \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1-t} dt \Leftrightarrow [-\ln(1-t)]_{t=0}^{t=x} - \sum_{n=0}^N \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1-t} dt \\ \Leftrightarrow -\ln(1-x) - \sum_{n=0}^N \frac{x^{n+1}}{n+1} &= \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1-t} dt \end{aligned}$$

(c) On encadre la partie de la fonction $\frac{t^{N+1}}{1-t}$ ne dépendant pas de N (ici $\frac{1}{1-t}$) et on conserve la partie dépendant de N (ici t^{N+1})

$$\begin{aligned} 0 &\leq t \leq x \Leftrightarrow -x \leq -t \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{1-x}_{>0 \text{ car } x \in [0,1]} \leq 1-t \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x} \times t^{N+1} \Rightarrow t^{N+1} \leq \frac{t^{N+1}}{1-t} \leq \frac{t^{N+1}}{1-x} \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{t^{N+1}}{1-t} \leq \frac{t^{N+1}}{1-x} \end{aligned}$$

On intègre ensuite cette inégalité sur $[0, x]$, ce qui est possible car $0 \leq x$ et l'on a

$$\int_0^x 0 dt \leq \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^{N+1} dt = \frac{1}{1-x} \left[\frac{x^{N+2}}{N+2} \right]_{t=0}^{t=x} \Rightarrow 0 \leq \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1-t} dt \leq \frac{x^{N+2}}{(1-x)(N+2)} \leq \frac{1}{(1-x)(N+2)}$$

car $x \in [0, 1]$ donc $x^{N+2} \in [0, 1]$.

(d) L'encadrement obtenu à la question 1.c) ainsi que l'égalité $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-x)(N+2)} = 0$ permet d'appliquer le théorème d'encadrement donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1-t} dt$, et l'égalité de la question 1.b) induit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left[-\ln(1-x) - \sum_{n=0}^N \frac{x^{n+1}}{n+1} \right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$$

Par définition de la convergence des séries (la suite des sommes partielles converge et sa limite est la somme de la série), on obtient que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=n+1} \frac{x^k}{k}$ converge pour $x \in [0, 1[$ et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

En choisissant $x = \frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k 2^k} = -\ln \left(1 - \frac{1}{2} \right) = -\ln \frac{1}{2} = \ln \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} \right) = \ln 2.$$

2. On note A l'évènement «le joueur gagne» et P_n l'évènement «obtenir le premier pile au n -ième lancer».

La pioche du billet de loterie dépend de l'urne choisie pour la pioche donc elle dépend du nombre de lancers pour obtenir le premier pile, c'est-à-dire des évènements $P_1, P_2, \dots$. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(P_n)_{n \geq 1}$, on a

$$p(A) = p(P_1 \cap A) + p(P_2 \cap A) + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} p(P_n \cap A) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(P_n) p_{P_n}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} = \ln 2$$

Justification des calculs des probabilités :

$$p(P_n) = p(\underbrace{F \dots F}_{n-1} P) = \left(1 - \frac{1}{2} \right)^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

$p_{P_n}(A)$: on a lancer n fois la pièce pour obtenir le premier pile donc on pioche dans l'urne contenant n billets donc un seul gagnant et on veut ce billet gagnant donc $p_{P_n}(A) = \frac{1}{n}$

correction de l'exercice 2

$$1. \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y}e^{-x} - \frac{x}{y}e^{-x} = \frac{(1-x)e^{-x}}{y} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{e} - \frac{x}{y^2}e^{-x}$$

2. Puisque $x > 0$ et $y > 0$, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x=1}{\frac{1}{e} - \frac{1}{y^2}e^{-1} = 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x=1}{\frac{y^2-1}{e} = 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x=1}{y^2=1} \xrightarrow{y>0} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \end{cases}$$

3. L'ensemble $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}_+^\times = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, la fonction g étant de classe C^2 et $(1, 1)$ étant le point critique de g sur $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}_+^\times$, on en déduit que le seul extrémum possible de g est $(1, 1)$. On applique ensuite la règle du « $rt - s^2$ »

$$\begin{aligned} r(x, y) &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-2+x}{y} & s(x, y) &= \frac{-1+x}{y^2}e^{-x} & t(x, y) &= \frac{2x}{y^3}e^{-x} \\ \begin{cases} r(1, 1) = -1 \\ s(1, 1) = 0 \\ t(1, 1) = 2e^{-1} \end{cases} &\Rightarrow (rt - s^2)(1, 1) = -2e^{-1} < 0 \end{aligned}$$

donc $(1, 1)$ n'est pas un extrémum de g

correction de l'exercice 3

1. Cela résulte essentiellement de la règle des signes.

Si $x > 0$, alors $e^x > 1$ donc $e^x - 1 > 0$ donc $\frac{e^x - 1}{x} > 0$.

Si $x < 0$, alors $e^x < 1$ donc $e^x - 1 < 0$ donc (le quotient de deux négatifs étant négatif) $\frac{e^x - 1}{x} > 0$.

2. Etude globale : La fonction $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^\times$ (comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^\times$). D'après la question 1, $\forall x \in \mathbb{R}^\times$, $\frac{e^x - 1}{x} > 0$ et la fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^\times$.

Etude locale en 0 : Il s'agit de calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x)$. Pour commencer, on remarque que

$$\frac{e^x - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + x - 1 + o(x)}{x} = 1 + o(1) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$$

donc $\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \ln 1 = 0$ et comme $f(0) = 0$, on a bien $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = f(0)$. Par conséquent, la fonction f est continue en 0 et sur $\mathbb{R}^\times$ donc sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ (comme quotient de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^\times$). D'après la question 1, $\forall x \in \mathbb{R}^\times$, $\frac{e^x - 1}{x} > 0$ et la fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = f(x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad f'(x) = \frac{\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)'}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{\frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2}}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$$

4. (a) Les techniques «élémentaires» ne convenant pas (limites algébriques, croissance comparée, équivalent), on procède par *DL*

$$xe^x - e^x + 1 = x(1 + x + o(x)) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$e^x - 1 = x + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \Rightarrow f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x \times x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- (b) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (question 2), C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ (question 3) et $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2}$ donc le théorème de prolongement continu de la dérivée permet d'affirmer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(0) = \frac{1}{2}$.

5. (a) On commence par calculer la dérivée de g

$$g'(x) = \underbrace{e^x + xe^x}_{(uv)' = u'v + uv'} - e^x = xe^x,$$

le signe de g' étant le signe de x , nous obtenons le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		-		+	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

- (b) La fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ (et strictement positive sur $\mathbb{R}^\times$) et comme $\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{g(x)}{x(e^x - 1)}$, on obtient le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		+		+	
x		-		+	
$e^x - 1$		-		+	
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Détermination des limites en $-\infty$ et $+\infty$.

En $-\infty, e^x - 1 \rightarrow -1$ donc $\frac{e^x - 1}{x} \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} 0^+$, ce qui entraîne que $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} -\infty$.

En $+\infty, \frac{e^x - 1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$

6. (a) On se lance dans le calcul.

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - x = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \ln e^x = \ln\left[\frac{\frac{e^x - 1}{x}}{e^x}\right] = \ln\left[\frac{e^x - 1}{x} \times e^{-x}\right] \\ &= \ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right) = \ln\left(\frac{e^{-x} - 1}{-x}\right) = f(-x) \end{aligned}$$

- (b) D'après la question 3.d), pour tout réel $x > 0$, $-x$ est strictement négatif et comme f est négative sur $\mathbb{R}_+^\times$, on a $f(-x) < 0$ donc $f(x) - x < 0$ sur $\mathbb{R}_+^\times$
- (c) Pour l'asymptote, la limite de f étant $+\infty$, on va procéder par factorisation des termes dominants

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \ln\left(\frac{e^x [1 - e^{-x}]}{x}\right) = \ln\left(\frac{e^x}{x}\right) + \ln[1 - e^{-x}] = x - \ln x + \ln[1 - e^{-x}] \\ f(x) - (x - \ln x) &= \ln[1 - e^{-x}] \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -e^{-x} + o(e^{-x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \end{aligned}$$

donc $y = x - \ln x$ est l'asymptote de la courbe représentative de f en $+\infty$ et comme $-e^{-x} < 0$, on en déduit que $f(x) - (x - \ln x) < 0$ lorsque x est assez grand donc l'asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ est au dessus de $\mathcal{C}_f$.

correction de l'exercice 4

1. Pour commencer, on constate que si l'on effectue 3 lancers, le plus grand nombre de changements est donné par PPF ou FPP . Plus généralement, pour obtenir k changements, il est indispensable d'effectuer $k+1$ lancers (1 changement nécessite deux lancers, 2 changements nécessitent 3 lancers, etc. !!). Par conséquent, si l'on effectue N lancers et que l'on souhaite k changements, on a nécessairement $k+1 \leq N \Leftrightarrow k \leq N-1$. Ensuite, si $k \leq N-1$, on dispose de k changements en considérant les lancers

P	F	P	F	..	P	F	F	F	...	F	ou	P	F	P	F	..	F	P	P	...	P
1	2	3	4	..	k	k+1	F	F	..	F		1	2	3	4	..	k	k+1	P	P	..

selon la parité de k donc $X_N(\Omega) = \{0, \dots, N-1\}$.

2. Loi de X_2 : on effectue 2 lancers donc $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$P(X_2 = 0) = P(PP) + P(FF) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad P(X_2 = 1) = P(FP) + P(PF) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

puis $E(X_2) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Loi de X_3 : on effectue 3 lancers donc $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et

$$\begin{aligned} P(X_3 = 0) &= P(PPP) + P(FFF) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \\ P(X_3 = 1) &= P(PFF) + P(FPP) + P(PPF) + P(FFP) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \\ P(X_3 = 2) &= P(FPF) + P(PFP) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3. L'évènement $(X_N = 0)$ signifie qu'il n'y a aucun changement en N lancers, ce qui implique que l'on obtient que des piles ou que des faces donc

$$P(X_N = 0) = P(\underbrace{PP\dots P}_{N \text{ fois}}) + P(\underbrace{FF\dots F}_{N \text{ fois}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^N + \left(\frac{1}{2}\right)^N = \frac{2}{2^N} = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

L'évènement $(X_N = 1)$ signifie qu'il y a un changement, ce qui implique que l'on obtient soit une succession de " Pile " puis une succession de " Face ", soit une succession de " Face " puis une succession de " Pile " donc

$$P(X_N = 1) = \sum_{k=1}^{N-1} P(\underbrace{P\dots P}_{k \text{ fois}} \underbrace{F\dots F}_{N-k \text{ fois}}) + \sum_{k=1}^{N-1} P(\underbrace{F\dots F}_{k \text{ fois}} \underbrace{P\dots P}_{N-k \text{ fois}}) = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^N + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^N = 2 \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^N = 2(N-1) \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

4. (a) La probabilité conditionnelle signifie que l'évènement $(X_N = k)$ est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement $(X_{N+1} = k)$, c'est-à-dire qu'au cours des N lancers, il y a k changements et on veut qu'au cours des $N+1$ lancers, il y ait encore k changements, autrement dit, il faut que le N -ième lancer et le $(N+1)$ -ième lancer donne le même résultat (pour ne pas ramener un changement supplémentaire). Etant donné que le N -ième lancer est déjà réalisé, la probabilité que le $(N+1)$ -ième lancer donne le même résultat est égale à $\frac{1}{2}$ (par exemple, si le N -ième lancer donne un Pile, le suivant donne encore un Pile) donc $P_{(X_N=k)}(X_{N+1} = k) = \frac{1}{2}$.

- (b) En utilisant la question précédente, on a

$$\begin{aligned} P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) &= P([X_{N+1} = X_N] \cap X_N = k) = P(X_{N+1} = k \cap X_N = k) \\ &= P(X_N = k)P_{(X_N=k)}(X_{N+1} = k) = \frac{1}{2}P(X_N = k). \end{aligned}$$

- (c) La famille $(X_N = k)_{k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ forment un système complet d'évènements donc

$$P(X_{N+1} - X_N = 0) = \sum_{k=0}^{N-1} P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2}P(X_N = k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} P(X_N = k) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

- (d) La variable X_N représente le nombre de changements en N lancers et la variable X_{N+1} représente le nombre de changements en $N + 1$ lancers. Etant donné qu'il ne peut y avoir que zéro ou un changement entre le N -ième lancer et le $(N + 1)$ -ième lancers, on en déduit que la variable $X_{N+1} - X_N$, qui représente en fait le nombre de changements entre le N -ième lancer et le $(N + 1)$ -ième lancer, prend seulement les valeurs 0 et 1, c'est-à-dire que $(X_{N+1} - X_N)(\Omega) = \{0, 1\}$.

D'autre part, la question précédente montre que $P(X_{N+1} - X_N = 0) = \frac{1}{2}$ donc

$P(X_{N+1} - X_N = 1) = 1 - P(X_{N+1} - X_N = 0) = \frac{1}{2}$, ce qui montre que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Son espérance est donc égale à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que

$$E(X_{N+1} - X_N) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow E(X_{N+1}) - E(X_N) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow E(X_{N+1}) = E(X_N) + \frac{1}{2}$$

La suite $(E(X_N))_{N \geq 1}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et $E(X_2) = \frac{1}{2}$ (question 2), ce qui nous permet d'écrire

$$E(X_N) = \frac{1}{2}(N - 2) + E(X_2) = \frac{N - 2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{N - 1}{2}$$

correction de l'exercice 5

I. Etude de la fonction f .

- La fonction sh est clairement C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\text{sh}' = \text{ch} > 0$ donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$ et $\text{sh}(0) = 0$, on en déduit que cette fonction est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$. La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image qui est $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \text{sh}(x)$ sont C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^\times$, $\text{sh}(x) \neq 0$ donc f est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et $\forall x \in \mathbb{R}^\times$, $f'(x) = \frac{\text{sh}(x) - x \text{ch}(x)}{\text{sh}^2(x)}$. En particulier, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^\times$. Après un petit de $DL_1(0)$ de $\text{sh}(x)$, on obtient que $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ donc $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ d'où $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ ce qui nous conduit à l'égalité $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ qui démontre la continuité de f en 0 donc la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ donc on est en droit d'essayer d'appliquer le théorème de prolongement continue de la dérivée. Nous savons que $f'(x) = \frac{\text{sh}(x) - x \text{ch}(x)}{\text{sh}^2(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\text{sh}(x) - x \text{ch}(x)}{x^2}$ donc nous allons effectuer un $DL_2(0)$ de $\text{sh}(x) - x \text{ch}(x)$. Il est immédiat que $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ ce qui donne

$$2(\text{sh}(x) - x \text{ch}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x^2) - x(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$$

donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1) \rightarrow 0$ ce qui démontre que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$. Ainsi f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.

- $h'(x) = \text{ch } x - (\text{ch}(x) + x \text{sh}(x)) = -x \text{sh}(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $h(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) \leq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $h(x) \geq 0$
- La dérivée de f est $f'(x) = \frac{h(x)}{\text{sh}^2(x)}$ est négative sur $\mathbb{R}_+$ et positive sur $\mathbb{R}_-$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et croissante sur $\mathbb{R}_-$.

II. Etude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Le tableau de variations de f montre que $f([0.8, 1]) = [f(1), f(0.8)] \subset [0.8, 1]$. Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $u_n \in [0.8, 1]$ ".
Initialisation : $u_0 = 1 \in [0.8, 1]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [0.8, 1]$ donc $f(u_n) \in [0.8, 1]$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0.8, 1]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
- On introduit la fonction $g(x) = f(x) - x$. Sa dérivée est $g'(x) = f'(x) - 1$ qui est négative sur $\mathbb{R}$ donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et elle est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image. Puisque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$. La fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α . D'autre part, $g(0.8) = f(0.8) - 0.8 \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ donc $\alpha \in [0.8, 1]$.

3. On sait que la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in [0.8, 1]$, $h(1) \leq h(x) \leq h(0.8) \leq 0$ et la fonction sh^2 est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (car sh est croissante et positive sur cet intervalle) donc $\text{sh}^2(0.8) \leq \text{sh}^2(x) \leq \text{sh}^2(1)$ et
- $$\frac{1}{\text{sh}^2(1)} \leq \frac{1}{\text{sh}^2(x)} \leq \frac{1}{\text{sh}^2(0.8)}.$$
- En utilisant la remarque de la question, on en déduit que $\frac{h(1)}{\text{sh}^2(0.8)} \leq \frac{h(x)}{\text{sh}^2(x)}$ et
- $$\frac{h(x)}{\text{sh}^2(x)} \leq \frac{h(0.8)}{\text{sh}^2(1)}.$$
4. L'inégalité précédente montre que $\forall x \in [0.8, 1]$, $|f'(x)| \leq 0.5$. Le théorème des accroissements finis montre que $\forall x, y \in [0.8, 1]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq 0.5|x - y|$. En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ et $y = \alpha$, on obtient que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.5|u_n - \alpha|$.
Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $|u_n - \alpha| \leq 0.2(0.5)^n$ ".
- Initialisation :** $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leq 0.2$ car 1 et α appartiennent à $[0.8, 1]$ qui est de longueur 0.2. Puisque $0.2(0.5)^0 = 0.2$, on en déduit que $(\mathcal{P}_0)$ est vrai.
- Hérédité :** Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $|u_n - \alpha| \leq 0.2(0.5)^n$ et la question précédente nous fournit l'inégalité $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.5|u_n - \alpha|$ donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.5|u_n - \alpha| \leq (0.5)0.2(0.5)^n = 0.2(0.5)^{n+1}$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
5. Nous savons d'après la question précédente que $0 \leq |u_n - \alpha| \leq 0.2(0.5)^n \rightarrow 0$ donc le théorème d'encadrement montre que $|u_n - \alpha| \rightarrow 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.