correction de l'exercice 1

1. Les variables X, Y, Z suivent respectivement la loi géométrique de paramètre $\dfrac{8}{14}=\dfrac{4}{7}$, $\dfrac{2}{14}=\dfrac{1}{7}$ et $\dfrac{4}{14}=\dfrac{2}{7}$ donc

$$\begin{aligned}
X(\Omega) &= \mathbb{N}^{\times} \quad Y(\Omega)=\mathbb{N}^{\times} \quad Z(\Omega)=\mathbb{N}^{\times}\\
\forall n &\in \mathbb{N}^{\times}, \quad \begin{cases} p(X=n)=P(\underbrace{\overline{R}\cdots\overline{R}}_{n-1 \text{ fois}}R)=\left(1-\dfrac{4}{7}\right)^{n-1}\dfrac{4}{7}=\dfrac{4}{7}\left(\dfrac{3}{7}\right)^{n-1}\\ p(Y=n)=P(\underbrace{\overline{V}\cdots\overline{V}}_{n-1 \text{ fois}}V)=\left(1-\dfrac{1}{7}\right)^{n-1}\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{7}\left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1}\\ p(X=n)=P(\underbrace{\overline{N}\cdots\overline{N}}_{n-1 \text{ fois}}N)=\left(1-\dfrac{2}{7}\right)^{n-1}\dfrac{2}{7}=\dfrac{2}{7}\left(\dfrac{5}{7}\right)^{n-1}\end{cases}\\
E(X) &= \frac{1}{\frac{4}{7}}=\frac{7}{4} \quad E(Y)=\frac{1}{\frac{1}{7}}=7 \quad E(Z)=\frac{1}{\frac{2}{7}}=\frac{7}{2}\\
V(X) &= \frac{1-\frac{4}{7}}{\left(\frac{4}{7}\right)^2}=\frac{21}{16} \quad V(Y)=\frac{1-\frac{1}{7}}{\left(\frac{1}{7}\right)^2}=42 \quad V(Z)=\frac{1-\frac{2}{7}}{\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{35}{4}
\end{aligned}$$

2. On note G : « le joueur gagne en au plus 4 lancers ». Pour que l'évènement G se réalise

   - soit il gagne au premier lancer, ce qui est équivalent à la réalisation de l'évènement R_1,
   - soit il ne perd pas au premier lancer (!!) et il gagne au second lancer, ce qui est équivalent à la réalisation de l'évènement N_1R_2,
   - soit il ne perd pas au premier lancer et au second lancer (!!) et il gagne au troisième lancer, ce qui est équivalent à la réalisation de l'évènement $N_1N_2R_3$,
   - soit il ne perd pas au premier lancer, au second et au troisième lancer (!!) tout en gagnant au quatrième lancer, ce qui est équivalent à la réalisation de l'évènement $N_1N_2N_3R_4$,

   Par conséquent, on a
   $$p(G)=p(R_1\cup N_1R_2\cup N_1N_2R_3\cup N_1N_2N_3R_4).$$
   L'union étant disjointe et les lancers indépendants, on en déduit que
   $$p(G)=p(R_1)+p(N_1R_2)+p(N_1N_2R_3)+p(N_1N_2N_3R_4)=\frac{4}{7}+\frac{2}{7}\times\frac{4}{7}+\left(\frac{2}{7}\right)^2\times\frac{4}{7}+\left(\frac{2}{7}\right)^3\times\frac{4}{7}=\frac{1908}{2401}$$

3. On note H : « le joueur perd en au plus 4 lancers ». Pour que l'évènement H se réalise

   - soit il perd au premier lancer, ce qui est équivalent à la réalisation de l'évènement V_1,
   - soit il ne perd pas et il ne gagne pas au premier lancer (!!) tout en perdant au second lancer, ce qui est équivalent à la réalisation de l'évènement N_1V_2,
   - soit il ne perd pas et il ne gagne pas au premier et second lancer (!!) tout en perdant au troisième lancer, ce qui est équivalent à la réalisation de l'évènement $N_1N_2V_3$,
   - soit il ne perd pas et il ne gagne pas au premier, au second et au troisième lancer (!!) tout en perdant au quatrième lancer, ce qui est équivalent à la réalisation de l'évènement $N_1N_2N_3V_4$,

   Par conséquent, on a
   $$p(H)=p(V_1\cup N_1V_2\cup N_1N_2V_3\cup N_1N_2N_3V_4).$$
   L'union étant disjointe et les lancers indépendants, on en déduit que
   $$p(H)=p(V_1)+p(N_1V_2)+p(N_1N_2V_3)+p(N_1N_2N_3V_4)=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{7}+\left(\frac{2}{7}\right)^2\times\frac{1}{7}+\left(\frac{2}{7}\right)^3\times\frac{1}{7}=\frac{477}{2401}$$

4. On note I : « joueur n'a ni gagné, ni perdu à l'issue des 4 premiers lancers ». Il est immédiat que $I=\overline{G\cup H}$, l'union étant disjointe (on ne peut pas gagner et perdre à la fois en 4 tirages), on a
   $$p(I)=1-p(G\cup H)=1-(p(G)+p(H))=\frac{16}{2401}$$

5. Il est immédiat que $R(\Omega) = \mathbb{N}^\times$ et, puisque gagner au n-ième lancer signifie que l'on a ni perdu, ni gagné lors des $n-1$ premiers lancers et que l'on gagne au n-ième lancer, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad p(R=n) = P(\underbrace{N\cdots N}_{n-1 \text{ fois}}R) = \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}\frac{4}{7}.$$

La variable R possède une espérance puisque la série

$$\sum_{n\geqslant 1} n \times p(R=n) = \sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}\frac{4}{7} = \frac{4}{7}\sum_{n\geqslant 0} n\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}$$

converge, étant donné que $\dfrac{2}{7} \in \left]-1,1\right[$ et l'on a

$$E(R) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\times p(R=n) = \frac{4}{7}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} = \frac{4}{7}\times\frac{1}{\left(1-\dfrac{2}{7}\right)^2} = \frac{28}{25}$$

Remarque : *Le lecteur consciencieux aura vérifié que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p(R=n) = 1$*, ce qui .... n'est pas le cas !! En effet, on a*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p(R=n) = \frac{4}{7}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} \underset{j=n-1}{=} \frac{4}{7}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^{j} = \frac{4}{7}\times\frac{1}{1-\dfrac{2}{7}} = \frac{4}{5} \neq 1$$

Autrement dit, des cas nous ont échappé. Dans nos calculs, on a supposé que le joueur est gagnant à un tour donné, ce qui n'est pas toujours le cas, par exemple lorsqu'il perd ou que le jeu ne s'arrête jamais. On doit attribuer une valeur à la variable R afin de tenir compte de ce phénomène. Intuitivement, on peut estimer qu'il s'agit de $R = +\infty$ (il gagne au bout d'un nombre infini de lancers). Ce choix pose un double problème :

- *d'une part, de quel droit peut affirmer que le joueur gagne au bout d'un nombre infini de lancers car il peut aussi perdre, voire ni perdre ,ni gagner*
- *d'autre part, R est une variable aléatoire réelle, i.e. toutes les valeurs que prend R sont des réels et non des quantités infinies.*

Pour sortir de cette ornière, le plus simple est d'attribuer une valeur à R qui ne fasse pas partie de l'univers-image intuité initialement $R(\Omega) = \mathbb{N}^\times$. On pourrait prendre $R = \dfrac{3}{2}$ ou d'autres valeurs, mais le plus simple est de prendre une valeur non située dans «l'intérieur» de $\mathbb{N}^\times$ afin de percevoir l'influence du cas où le joueur ne gagne pas. Une valeur possible est $R = 0$. On peut choisir $R = -1$, $R = \dfrac{1}{\pi}$, etc. mais $R = 0$ entraine que l'espérance de la variable R actuelle est identique à l'espérance de la variable R calculée précédemment car

$$E(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\times p(R=n) = \underbrace{0\times p(R=0)}_{=0} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\times p(R=n) = \frac{28}{25}$$

Ce phénomène apparait également pour la variable S ainsi que pour les variables X, Y et Z mais pour ces dernières, la somme des probabilités fait 1 donc le cas résiduel (la non-obtention de la couleur souhaitée) est de probabilité nulle donc il ne joue aucun rôle au sens des probabilités (mais pas au sens de la logique !!)

6. Il est immédiat que $S(\Omega) = \mathbb{N}^\times$ et, puisque perdre au n-ième lancer signifie que l'on a ni perdu, ni gagné lors des $n-1$ premiers lancers et que l'on perd au n-ième lancer, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad p(S=n) = P(\underbrace{N\cdots N}_{n-1 \text{ fois}}V) = \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}\frac{1}{7}.$$

La variable S possède une espérance puisque la série

$$\sum_{n\geqslant 1} n \times p(S=n) = \sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}\frac{1}{7} = \frac{1}{7}\sum_{n\geqslant 0} n\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}$$

converge, étant donné que $\frac{2}{7} \in]-1,1[$ et l'on a

$$E(S) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times p(S=n) = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{\left(1-\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{7}{25}$$

7. Le joueur gagne (en un nombre quelconque de lancers) si, et seulement si, il gagne au premier lancer, au second lancer, etc. donc
$$p(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}\frac{4}{7} \underset{j=n-1}{=} \frac{4}{7}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^j = \frac{4}{7} \times \frac{1}{1-\frac{2}{7}} = \frac{4}{5}$$

8. Le joueur perd (en un nombre quelconque de lancers) si, et seulement si, il perd au premier lancer, au second lancer, etc. donc
$$p(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(=n) = \frac{1}{7}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} \underset{j=n-1}{=} \frac{1}{7}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^j = \frac{1}{7} \times \frac{1}{1-\frac{2}{7}} = \frac{1}{5}$$

9. Il est immédiat que $C = \overline{A \cup B}$, l'union étant disjointe, on a
$$p(C) = 1 - p(A \cup B) = 1 - (p(A) + p(B)) = 0$$
Remarque : $p(C) = 0$ *ne signifie pas que* C *ne se réalise jamais (par exemple, il suffit d'obtenir toujours des boules noires).*

correction de l'exercice 2

I. Première partie

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Je laisse le lecteur constater que $A^3 = A^2 + 2A$.

2. On ne peut procéder par polynôme annulateur puisqu'il n'y a pas de «terme constant».
On procède par les opérations élémentaires sur les matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \text{«}Pivot\text{»} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \text{«}Pivot\text{»} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right.$$
La nouvelle matrice est triangulaire supérieure et (au moins) l'un de ses coefficients diagonaux est nul donc la matrice A n'est pas inversible.

3. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nA^2$
Initialisation $n = 1$: $A^1 = A$ et recherchons deux réels a_1 et b_1 tel que $a_1A + b_1A^2 = A$. On vérifie que $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ convient bien puisque $1 \times A + 0 \times A^2 = A = A^1$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+!})$, c'est-à-dire supposons qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nA^2$ et montrons qu'il existe deux réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}A^2$
$$A^{n+1} = A^n \times A = \left(a_nA + b_nA^2\right)A = a_nA^2 + b_nA^3 = a_nA^2 + b_n(A^2 + 2A) = 2b_nA + (a_n + b_n)A^2$$
En choisissant les réels $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$, on a bien $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}A^2$ donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

4. (a) $a_{n+2} = 2b_{n+1} = 2(a_n + b_n) = 2a_n + \underbrace{2b_n}_{=a_{n+1}} = 2a_n + a_{n+1}$.
   (b) La suite a est donc récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   Equation caractéristique : $x^2 = x + 2$ donc les racines sont -1 et 2, ce qui implique l'existence de deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad a_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n$.

Détermination de α et β : Puisque $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ (cf. question 3) donc $a_2 = 2b_1 = 0$, $b_2 = a_1 + b_1 = 1$ (cf. question 3), on a

$$\begin{cases} \alpha(-1)^1 + \beta 2^1 = a_1 \\ \alpha(-1)^2 + \beta 2^2 = a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha = 2 \\ 6\beta = 1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{2}{3} \\ \beta = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

ce qui nous donne

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}2^n \qquad b_n = \frac{1}{2}a_{n+1} = \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{6}2^{n+1}\right] = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}2^n$$

(c) $A^n = \left(-\dfrac{2}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{6}2^n\right) A + \left(\dfrac{1}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{6}2^n\right) A^2$

II. Seconde partie

1. (a) En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = -x \\ x = -y \\ x = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z = 0 \\ x+y = 0 \\ x+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z = 0 \\ y-z = 0 \\ -y+z = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{c} \text{«}\mathit{Pivot}\text{»} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z = 0 \\ y-z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{c} \text{«}\mathit{Pivot}\text{»} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = -z \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad z \in \mathbb{R}$$

$$AX = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad z \in \mathbb{R}$$

$$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 2x \\ x = 2y \\ x = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z = 0 \\ x-2y = 0 \\ x-2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z = 0 \\ -y+z = 0 \\ y-z = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{c} \text{«}\mathit{Pivot}\text{»} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z = 0 \\ -y+z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{c} \text{«}\mathit{Pivot}\text{»} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 2z \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad z \in \mathbb{R}$$

(b) On procède par les opérations élémentaires sur les matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \text{«}\mathit{Pivot}\text{»} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \text{«}\mathit{Pivot}\text{»} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \right.$$

La nouvelle matrice est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc elle est inversible, ce qui implique l'inversibilité de P. On poursuit en effectuant le pivot inversé.

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -\frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{6}L_3 \end{array} \right.$$

Par conséquent, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

2. Soit on est bovin : on remplace D par une matrice $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, on calcule PDP^{-1} et on identifie, soit 9 équations à 3 inconnues, bonne chance. Soit on réfléchit et on utilise les propriétés algébriques des matrices, cela a été inventé pour cela (pourquoi Ducros se décarcasse-t-il sinon ?).

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}AP = D \qquad P^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

correction de l'exercice 3

1. (a) Puisque $x > 0$, on a

$$h_n(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{xe^{-x}}{x^n} - x^n = 0 \Leftrightarrow \frac{xe^{-x} - x^{2n}}{x^n} = 0 \Leftrightarrow xe^{-x} - x^{2n} = 0 \underset{\div x}{\Leftrightarrow} e^{-x} - x^{2n-1} \Leftrightarrow \varphi_n(x) = 0$$

(b) Bijectivité de φ_n : La fonction φ_n est continue sur $]0, +\infty[$ (comme somme de fonctions continues sur cet intervalle). En outre, la fonction φ_n est strictement décroissance car elle est la somme des fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto -x^{2n-1}$ qui sont strictement décroissantes sur $]0, +\infty[$. Par conséquent, la fonction φ_n réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\varphi_n(]0, +\infty[) =]-\infty, 1[$ (puisque $\lim_{x\to+\infty} \varphi_n(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x^{2n-1}) = -\infty$).

Existence de u_n : Pour tout entier $n \geqslant 1$, $0 \in]-\infty, 1[$ donc l'équation $\varphi_n(x) = 0 \Leftrightarrow h_n(x) = 0$ possède une et une seule solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par φ_n).

$0 < u_n < 1$: Par construction, $u_n > 0$ (puisque $u_n \in]0, +\infty[$). Pour justifier que $u_n < 1$, on compare les images par φ_n (et non par h_n puisque l'on a utilisé la bijectivité de φ_n et non de h_n pour justifier l'existence de u_n)

$$\varphi_n(u_n) = 0 \qquad (u_n \text{ solution de } \varphi_n(x) = 0) \qquad \varphi_n(1) = e^{-1} - 1 < 0$$

donc $\varphi_n(1) < \varphi_n(u_n)$ et la fonction φ_n est bijective et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ donc $u_n < 1$.

2. (a) Par définition, on a

$$\varphi_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow e^{-u_n} - (u_n)^{2n-1} = 0 \Leftrightarrow e^{-u_n} = (u_n)^{2n-1} \Leftrightarrow -u_n = \ln(u_n)^{2n-1} = (2n-1)\ln(u_n) \Leftrightarrow \ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n-1}$$

(b) On a

$$\forall n \geqslant 1, \quad 0 < u_n < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2n-1} < -\frac{u_n}{2n-1} < 0$$

et puisque $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$, le théorème d'encadrement montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{u_n}{2n-1} = 0 \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\to} e^0 = 1$$

correction de l'exercice 4

1. $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$, $\quad P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$, $\quad P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$; $\quad E(X_1) = \frac{1}{2}$

2. Par définition, on a $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$. Le contenu de l'urne au second tirage dépend de la boule obtenue au premier tirage (obtention de la boule noire ou de la boule blanche, c'est-à-dire des évènements $(X_1 = 0)$ et $(X_1 = 1)$. L'application de la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(X_1 = 0)$, $(X_1 = 1)$ nous donne

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} = \frac{1}{2} \\ P(X_2 = 1) &= 1 - P(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, la variable X_2 suit la loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$ et $E(X_2) = \frac{1}{2}$.

Justification des calculs de probabilités :

$P_{(X_1=0)}(X_2 = 0)$: *L'évènement* $(X_1 = 0)$ *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_2 = 0)$, *i.e. la boule noire a été piochée au premier tirage, donc on remet la boule noire dans l'urne ainsi que c boules noires supplémentaires,* *et on souhaite piocher la boule noire à la seconde pioche. Avant la seconde pioche, l'urne contient donc* $2+c$ *boules (les deux initiales et les c boules noires supplémentaires), dont* 1 *boule blanche et* $c+1$ *boules noires donc la probabilité d'obtenir une boule noire vaut* $\dfrac{c+1}{c+2} = p_{(X_1=0)}(X_2=0)$

$\underline{P_{(X_1=1)}(X_2=0)}$: *L'évènement* $(X_1=1)$ *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_2=0)$*, i.e. la boule blanche a été piochée au premier tirage, donc on remet la boule blanche dans l'urne ainsi que c boules blanches supplémentaires, et on souhaite piocher la boule noire à la seconde pioche. Avant la seconde pioche, l'urne contient donc* $2+c$ *boules (les deux initiales et les c boules blanches supplémentaires), dont* $c+1$ *boules blanches et* 1 *boule noire donc la probabilité d'obtenir une boule blanche vaut* $\dfrac{1}{c+2} = p_{(X_1=1)}(X_2=0)$

3. Puisque $X_1(\Omega)=\{0,1\}$ et $X_2(\Omega)=\{0,1\}$, il est immédiat que $Z_2(\Omega)=\{0,1,2\}$ et

$$\begin{aligned}
P\left(Z_2=0\right) &= P(X_1=0\cap X_2=0)=\frac{1}{2}\times\frac{c+1}{c+2}\\
P\left(Z_2=1\right) &= P((X_1=1\cap X_2=0)\cup(X_1=0\cap X_2=1))=P\left(X_1=1\cap X_2=0\right)+P\left(X_1=0\cap X_2=1\right)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{c+2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{c+2}=\frac{1}{c+2}\\
P\left(Z_2=2\right) &= P(X_1=1\cap X_2=1)=\frac{1}{2}\times\frac{c+1}{c+2}
\end{aligned}$$

4. (a) L'évènement $(Z_p=k)$ est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement $(X_{p+1}=1)$, i.e. on a obtenu k boules noires lors des p premiers tirages et on souhaite piocher une boule blanche au $(p+1)$-ième tirage. Par conséquent, on déjà obtenu k boules blanches en p tirages et on souhate : on a donc ajouté $k\times c$ boules blanches et $(p-k)\times c$ boules noires dans l'urne. Après le $p^{ième}$ tirage, l'urne contient $p\times c+2$ boules dont $kc+1$ boules blanches et $(p-k)\times c+1$ boules noires. On pioche une boule dans cette urne et on obtient une blanche. La probabilité d'obtenir une blanche vaut $\dfrac{kc+1}{pc+2} = P_{(Z_p=k)}(X_{p+1}=1)$

(b) Pour obtenir une boule blanche au $(p+1)$-ième tirage, il est nécessaire de connaitre le contenu de l'urne à l'issue des p premiers tirages. Le contenu de cette urne dépend du nombre de boules blanches obtenus lors des p premiers tirages. Soit on a obtenu 0 boule blanche $(Z_p=0)$, soit 1 boule blanche $(Z_p=1)$, ..., soit p boules blanches $(Z_p=p)$. En utilisant le système On considère le système complet d'évènements $(Z_p=k)_{0\leqslant k\leqslant p}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X_{p+1} &= 1)=\sum_{k=0}^{p}P(Z_p=k\cap X_{p+1}=1)=\sum_{k=0}^{p}P(Z_p=k)P_{(Z_p=k)}(X_{p+1}=1)=\sum_{k=0}^{p}\frac{kc+1}{pc+2}P(Z_p=k)\\
&= \frac{1}{2+pc}\sum_{k=0}^{p}(kc+1)P(Z_p=k)=\frac{c}{2+pc}\sum_{k=0}^{p}kP(Z_p=k)+\frac{1}{2+pc}\sum_{k=0}^{p}P(Z_p=k)\\
&= \frac{c}{2+pc}E(Z_p)+\frac{1}{2+pc}=\frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}
\end{aligned}$$

(c) Puisque Z_{p+1} représente le nombre de boules blanches obtenues lors des $(p+1)$ premiers tirages et que Z_p représente le nombre de boules blanches obtenues lors des p premiers tirages. Par conséquent, $Z_{p+1}-Z_p$ représente le nombre de boules blanche obtenue lors du $(p+1)$-ième tirage, ce qui s'écrit par définition X_{p+1} donc

$$Z_{p+1}-Z_p=X_{p+1}\Leftrightarrow Z_{p+1}=Z_p+X_{p+1}$$

Par linéarité de l'espérance et comme $X_{p+1}(\Omega)=\{0,1\}$, on a

$$\begin{aligned}
E(Z_{p+1}) &= E(Z_p+X_{p+1})=E(Z_p)+E(X_{p+1})=E(Z_p)+0\times P(X_{p+1}=0)+1\times P(X_{p+1}=1)\\
&= E(Z_p)+P(X_{p+1}=1)=E(Z_p)+\frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}=\frac{1+(2+c+pc)E(Z_p)}{2+pc}
\end{aligned}$$

(d) $\underline{E(Z_p)=\dfrac{p}{2}}$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{H}_p)$: $E(Z_p)=\dfrac{p}{2}$

Initialisation $p=1$: Par définition, on a $Z_1=X_1$ donc $E(Z_1)=E(X_1)=\dfrac{1}{2}$ ce qui démontre $(\mathcal{H}_1)$.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{H}_p)$ soit vraie et montrons $(\mathcal{H}_{p+1})$, i.e. supposons que $E(Z_p)=\dfrac{p}{2}$ et montrons que $E(Z_{p+1})=\dfrac{p+1}{2}$. D'après la question 4.c), on a

$$\begin{aligned}
E(Z_{p+1}) &= \frac{1+(2+c+pc)E(Z_p)}{2+pc}=\frac{1+(2+c+pc)\frac{p}{2}}{2+pc}=\frac{2+(2+c+pc)p}{2(2+pc)}=\frac{2+2p+pc+p^2c}{2(2+pc)}\\
&= \frac{(2p+p^2c)+(2+pc)}{2(2+pc)}=\frac{p(2+pc)+(2+pc)}{2(2+pc)}=\frac{2+pc}{2+pc}\times\frac{p+1}{2}=\frac{p+1}{2}
\end{aligned}$$

On peut également remarquer que

$$\frac{2+2p+pc+p^2c}{2(2+pc)} = \frac{p+1}{2} \Leftrightarrow 2+2p+pc+p^2c = (2+pc)(p+1)$$

et cette dernière égalité est vraie.
loi de X_{p+1} : En combinant l'égalité obtenue à la question 4.c) et l'égalité $E(Z_p) = \frac{p}{2}$, on en déduit que

$$P(X_{p+1}=1) = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc} = \frac{1+c\times\frac{p}{2}}{2+pc} = \frac{2+pc}{2(2+pc)} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(X_{p+1}=0) = 1-P(X_{p+1}=1) = \frac{1}{2}$$

Par conséquent, la variable X_{p+1} suit la loi de Bernouille de paramètre $\frac{1}{2}$.
Conclusion : quel que soit le nombre de tirages effectués, la probabilité de piocher une boule blanche à un tirage quelconque est constant, ce qui ne semble pas évident au préalable. Etonnant, non ?

correction de l'exercice 5

1. (a) Variations de f sur $[0,2[$: La fonction $x \mapsto \frac{x}{2-x}$ est C^1 sur $[0,2[$ (comme quotient de deux fonctions C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle) et $\forall x \in]0,2[,\quad \frac{x}{2-x} > 0$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ est C^1 sur $]0,2[$. On a

$$\forall x \in]0,2[,\quad f'(x) = \left(\sqrt{\frac{x}{2-x}}\right)' = \frac{\left(\frac{x}{2-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x}{2-x}}} = \frac{\frac{2}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{2-x}}} = \frac{1}{(2-x)^2\sqrt{\frac{x}{2-x}}} > 0$$

donc la fonction f est strictement croissante sur $]0,2[$.
Tangentes : D'après les calculs précédents, la fonction f est C^1 sur $]0,2[$. En particulier, elle est dérivable en 1, ce qui entraine l'existence de la tangente au point d'abscisse $x=1$, dont l'équation est

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + (x-1) = x$$

Par contre, puisque f est visiblement continue sur $[0,2[$, C^1 sur $]0,2[$ et $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$, on en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en 0, néanmoins, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $x=0$.

(b) On procède par les méthodes algébriques (et on évite impérativement l'introduction d'une fonction auxiliaire ainsi que l'étude de ses variations par la dérivée !!). Etant donné que $x \in [0,2[$, $f(x)$ et x sont positifs, ce qui nous permet d'élever au carré l'inéquation proposée

$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{2-x}} \geqslant x \Leftrightarrow \frac{x}{2-x} \geqslant x^2 \underset{2-x\geqslant 0}{\Leftrightarrow} x \geqslant x^2(2-x) \Leftrightarrow x - 2x^2 + x^3 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x(1-2x+x^2) \geqslant 0 \underset{x\geqslant 0}{\Leftrightarrow} 1-2x+x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (1-x)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

ce qui est toujours vrai, donc $\forall x \in [0,2[,\quad f(x) \geqslant x$.
D'après les calculs précédents, l'égalité $f(x) = x$ est vérifiée ssi $(1-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

2. (a) La fonction f est continue sur $[0,2[$, C^1 sur $]0,2[$ et sa dérivée est strictement positive sur $]0,2[$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0,2[$ donc elle réalise une bijection de $[0,2[$ sur $f([0,2[) = [0,+\infty[$ ($\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$)

(b) Puisque f est bijective de $[0,2[$ sur $[0,+\infty[$, C^1 sur $]0,2[$ et $f'(x) \neq 0$ sur $]0,2[$, on en déduit que f^{-1} est C^1 sur $[0,+\infty[\backslash\{f(0)\} =]0,+\infty[$.

(c) Détermination de l'antécédent de 4

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{2-x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{x}{2-x} = 16 \Leftrightarrow x = 16(2-x) \Leftrightarrow 17x = 32 \Leftrightarrow x = \frac{32}{17} \Rightarrow f^{-1}(4) = \frac{32}{17}$$

La fonction f^{-1} est dérivable en 4 donc on a Calculer

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(4))} = \frac{1}{f'\left(\frac{32}{17}\right)} = \left(2-\frac{32}{17}\right)^2\sqrt{\frac{\frac{32}{17}}{2-\frac{32}{17}}} = \frac{4}{289}\sqrt{16} = \frac{16}{289}$$

(d) $f(a) = b \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{a}{2-a}} = b \Leftrightarrow \dfrac{a}{2-a} = b^2 \Leftrightarrow a = b^2(2-a) \Leftrightarrow (1+b^2)a = 2b^2 \Leftrightarrow a = \dfrac{2b^2}{1+b^2}$.

(e) L'unique antécédent de x appartenant à l'intervalle $[0,2[$ est l'unique réel a appartenant à $[0,2[$ et tel que $f(a) = x$. La question 2.d) nous donne $a = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$ donc $f^{-1}(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$.

3. (a) On va procéder par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: $u_n \in [0,1]$ mais on doit, au préalable, montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f. Ceci est aisé puisque, d'après la question 1.b), la fonction f est croissante sur $[0,2[$ donc $f([0,1[) = [f(0), f(1)[= [0,1[$.
Initialisation : $u_0 \in [0,1]$ d'après l'énoncé donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [0,1]$ donc $f(u_n) \in f([0,1]) = [0,1]$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(b) D'après la question 1.b), on a l'inégalité $f(x) \geqslant x$ sur $[0,2[$ donc sur $[0,1]$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1]$, on en déduit que $f(u_n) \geqslant u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$ donc la suite u est croissante.

(c) La suite u est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers une limite $L \in [0,1]$ (puisque $u_n \in [0,1]$). Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$, que $u_n \to L$, $u_{n+1} \to L$ et que f est continue sur $[0,1]$ donc en L, en passant à la limite, on obtient que $L = f(L)$. D'après la question 1.b), l'unique solution de cette équation est $L = 0$ ou $L = 1$.

Premier cas $u_0 = 0$: Dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$ et la suite u converge vers 0.

Second cas $u_0 \in]0,1]$: La monotonie de la suite u implique que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_0$ donc $L \geqslant u_0$ et $u_0 > 0$ donc $L > 0$, ce qui entraine que $L = 1$ et la suite u converge vers 1.