correction de l'exercice 1

1. $I_0 = \int_0^1 e^{-2x}dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1-e^{-2}}{2}$

$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-2x}dx = \left[(1-x)\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 -\frac{e^{-2x}}{-2}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 e^{-2x}dx}_{=I_0} = \frac{1}{2} - \frac{1-e^{-2}}{4} = \frac{1+e^{-2}}{4}$

2. $I_{n+1} - I_n \underset{\text{linéairité}}{=} \int_0^1 e^{-2x}(1-x)^n\left[(1-x)-1\right]dx = -\int_0^1 \underbrace{xe^{-2x}(1-x)^n}_{\geqslant 0 \text{ sur } [0,1]} \leqslant 0$ (car l'intégration porte sur des bornes croissantes) ce qui implique que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3. $I_n = \int_0^1 \underbrace{(1-x)^n e^{-2x}}_{\geqslant 0 \text{ sur } [0,1]}dx \geqslant 0$ (car l'intégration porte sur des bornes croissantes).

4. La suite $(I_n)_n$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

5. $\forall x \in [0,1] \quad , 0 \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 2x \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant -2x \leqslant 0 \Leftrightarrow e^{-2} \leqslant e^{-2x} \leqslant 1 \Rightarrow e^{-2x} \leqslant 1$

6. En multipliant l'inégalité précédente par $(1-x)^n$ (qui est positif sur $[0,1]$), on obtient

$$\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx \leqslant \int_0^1 (1-x)^n dx \Leftrightarrow I_n \leqslant \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1}$$

et comme $I_n \geqslant 0$, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

7. Puisque $\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement montre que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

8. En dérivant $(1-x)^{n+1}$ (pour diminuer l'exposant, puisque l'on doit passer de I_{n+1} à I_n) et en intégrant e^{-2x}, on obtient

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-2x}dx = \left[(1-x)^{n+1}\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 -(n+1)(1-x)^n\frac{e^{-2x}}{-2}dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{(n+1)}{2}I_n \Rightarrow 2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n \end{aligned}$$

9. Puisque $\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$ (question 6), l'égalité $2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$ montre que $\lim_{n\to+\infty}\left[1-(n+1)I_n\right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(n+1)I_n = 1$.

10. En multipliant l'égalité $2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$ par $(n+2)$, on obtient $2(n+2)I_{n+1} = (n+2)(1-(n+1)I_n)$.
Puisque le membre de gauche tend vers 2 (question 9), on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}((n+2)\left[1-(n+1)I_n\right]) = 2$.

correction de l'exercice 2

1. (a) La fonction $g : x \mapsto \frac{x}{2-x}$ est dérivable sur $[0,2[$ (quotient de deux fonctions dérivables sur $[0,2[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,2[$) et sa dérivée vaut $\left(\frac{x}{2-x}\right)' = \frac{2}{(x-2)^2} \geqslant 0$ sur $[0,2[$. On en déduit que la fonction $g : x \mapsto \frac{x}{2-x}$ est croissante sur $[0,2[$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant également croissante sur $g([0,2[) = [0,+\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ est croissante sur $[0,2[$.

   (b) Puisque $x \in [0,2[$, on va élever au carré l'égalité $f(x) = x$ (ce qui est une équivalence puisque les deux membres sont positifs)

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{2-x}} = x \underset{x\geqslant 0}{\Leftrightarrow} \frac{x}{2-x} = x^2 \Leftrightarrow x = (2-x)x^2 \Leftrightarrow x\left[1-2x+x^2\right] = 0 \Leftrightarrow x(1-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0,1\}$$

(c) Puisque $x \in [0,2[$, on va élever au carré l'égalité $f(x) \geqslant x$ (ce qui est une équivalence puisque les deux membres sont positifs)

$$f(x) \geqslant x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{2-x}} \geqslant x \underset{x\geqslant 0}{\Leftrightarrow} \frac{x}{2-x} \geqslant x^2 \underset{x\in[0,2[\Rightarrow 2-x\geqslant 0}{\Leftrightarrow} x \geqslant (2-x)x^2 \Leftrightarrow x\left[1-2x+x^2\right] \geqslant 0 \Leftrightarrow x(1-x)^2 \geqslant 0$$

Cette dernière inégalité est évidemment vraie sur $[0,2[$ donc $\forall x \in [0,2[, \quad f(x) \geqslant x$.

2. (a) Commençons par remarquer qu'en raison de la monotonie de f sur $[0,1]$, on a $f([0,1]) = [0,1]$.
On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [0,1]$.
Initialisation $n = 0$: $u_0 \in [0,1]$ d'après l'énoncé donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $u_n \in [0,1]$ et montrons $u_{n+1} \in [0,1]$.
Puisque $u_n \in [0,1]$, on a $\underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} \in f([0,1]) = [0,1]$ donc $u_{n+1} \in [0,1]$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(b) D'après la question 2.a), on a $u_n \in [0,1]$, donc on peut remplacer x par u_n dans l'inégalité de la question 1.c), ce qui nous donne $f(u_n) \geqslant u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$ donc la suite $(u_n)_n$ est croissante.

(c) La suite u est croissante (question 2.b) et majorée par 1 (question 2.a) donc elle converge. Soit L sa limite, alors elle vérifie l'égalité $f(L) = L \Leftrightarrow L \in \{0,1\}$.
Premier cas : $u_0 = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$ donc $L = 0$
Second cas : $u_0 > 0$, la monotonie de la suite u implique que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_0$ donc $L \geqslant u_0 > 0$ donc $L = 1$.

correction de l'exercice 3

1. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ (comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle) et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(-\frac{2}{x}+1\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{-2+x}{x}\right)$$

Par conséquent, le tableau des variations de φ est donné par

x	0		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$		$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x}+\ln x\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x}\left(1+\frac{x\ln x}{2}\right) = +\infty \text{ (par les croissances comparées).}$$

2. D'après le tableau de variations précédents et les données numériques de l'énoncé, on a $\varphi\left(\left[\frac{3}{2};2\right]\right) = \left[\varphi(2);\varphi\left(\frac{3}{2}\right)\right] \subset \left[\frac{3}{2};2\right]$.

3. La fonction φ' est dérivable sur $\left[\frac{3}{2};2\right]$ (comme somme de telles fonctions) et l'on a

$$\varphi''(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{4}{x}-1\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{4-x}{x}\right) \geqslant 0 \quad \forall x \in \left[\frac{3}{2};2\right]$$

Par conséquent, la fonction φ' est croissante sur $\left[\frac{3}{2};2\right]$ donc

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2};2\right], \quad \varphi'\left(\frac{3}{2}\right) \leqslant \varphi'(x) \leqslant \varphi'(2) \Leftrightarrow -\frac{2}{9} \leqslant \varphi'(x) \leqslant 0 \Rightarrow |\varphi'(x)| \leqslant \frac{2}{9}$$

(la distance de $\varphi'(x)$ est inférieure à la distance de $-\frac{2}{9}$ à 0)

4. On a $\varphi(x) = x \Leftrightarrow \frac{2}{x} + \ln(x) = x \Leftrightarrow \frac{2}{x} + \ln(x) - x = 0$. On introduit la fonction auxiliaire $g : x \mapsto \frac{2}{x} + \ln(x) - x$
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ (comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle) et sa dérivée vaut

$$g'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - 1 = \frac{-2+x-x^2}{x^2}$$

Le trinôme $-2+x-x^2=0$ a pour discriminant $1^2-4(-1)(-2)=-8<0$ donc il est strictement négatif sur $\mathbb{R}$ tout entier donc $g'(x)<0$ sur $\mathbb{R}_+^\times$.
Par conséquent, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$, strictement décroissante sur cet intervalle, donc le théorème de bijection montre qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $g(\mathbb{R}_+^\times)=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$ car

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\varphi(x)-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\ln x-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-x\left(-\frac{2}{x^2}-\frac{\ln x}{x}+1\right)=-\infty$ (d'après les croissances comparées)

Puisque $0\in g(\mathbb{R}_+^\times)=\mathbb{R}$, on en déduit que l'équation $g(x)=0\Leftrightarrow\varphi(x)=x$ admet une et une seulement solution sur $\mathbb{R}_+^\times$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par g).
Pour l'encadrement de x_1, on compare les images et, d'après les données numériques de la question 2, on a :

$$g\left(\frac{3}{2}\right)=\varphi\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}\geqslant 0,\quad g(x_1)=0,\quad g(2)=\varphi(2)-2\leqslant 0$$

On peut donc affirmer que $g\left(\frac{3}{2}\right)\geqslant g(x_1)\geqslant g(2)$ et la fonction g étant strictement décroissante et bijective sur $\mathbb{R}_+^\times$, on a $\frac{3}{2}\leqslant x_1\leqslant 2\Leftrightarrow x_1\in\left[\frac{3}{2};2\right]$.

5. $\frac{3}{2}\leqslant u_n\leqslant 2$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: $u_n\in\left[\frac{3}{2};2\right]$.

Initialisation $n=0$: $u_0=\frac{3}{2}\in\left[\frac{3}{2};2\right]$ d'après l'énoncé donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $u_n\in\left[\frac{3}{2};2\right]$ et montrons $u_{n+1}\in\left[\frac{3}{2};2\right]$.
Puisque $u_n\in\left[\frac{3}{2};2\right]$, on a $\underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}}\in f\left(\left[\frac{3}{2};2\right]\right)\subset\left[\frac{3}{2};2\right]$ donc $u_{n+1}\in\left[\frac{3}{2};2\right]$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
$|u_{n+1}-x_1|\leqslant\frac{2}{9}|u_n-x_1|$: Puisque $\forall x\in\left[\frac{3}{2};2\right],\quad|\varphi'(x)|\leqslant\frac{2}{9}$ (question 3), l'inégalité des accroissements finis nous donne

$$\forall x,y\in\left[\frac{3}{2};2\right],\quad|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\frac{2}{9}|x-y|$$

En choisissant $x=u_n\in\left[\frac{3}{2};2\right]$ (première partie de cette question) et $y=x_1\in\left[\frac{3}{2};2\right]$ (question 4), qui est point fixe de φ, on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad\left|\underbrace{\varphi(u_n)}_{=u_{n+1}}-\underbrace{\varphi(x_1)}_{=x_1}\right|\leqslant\frac{2}{9}|u_n-x_1|\Leftrightarrow|u_{n+1}-x_1|\leqslant\frac{2}{9}|u_n-x_1|$$

$|u_n-x_1|\leqslant\left(\frac{2}{9}\right)^n$:On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: $|u_n-x_1|\leqslant\left(\frac{2}{9}\right)^n$.
Initialisation $n=0$: $|u_0-x_1|=\left|\frac{3}{2}-x_1\right|\leqslant\frac{1}{2}$ (car $x_1\in\left[\frac{3}{2};2\right]$ donc la distance $\left|\frac{3}{2}-x_1\right|$ entre $\frac{3}{2}$ et x_1 ne peut excéder la distance entre $\frac{3}{2}$ et 2, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$) et $\left(\frac{2}{9}\right)^0=1$ donc $|u_0-x_1|\leqslant\left(\frac{2}{9}\right)^0$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_0)$.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $|u_n-x_1|\leqslant\left(\frac{2}{9}\right)^n$ et montrons $|u_{n+1}-x_1|\leqslant\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}$.
En combinant l'inégalité découlant de l'IAF à $(\mathcal{P}_n)$, on obtient

$$|u_{n+1}-x_1|\underset{\text{IAF}}{\leqslant}\frac{2}{9}|u_n-x_1|\underset{(\mathcal{P}_n)}{\leqslant}\frac{2}{9}\times\left(\frac{2}{9}\right)^n=\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

6. Puisque l'on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n = 0$, le théorème d'encadrement nous donne $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - x_1| = 0 \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_1$ (la distance entre u_n et x_1 tend vers 0)

correction de l'exercice 4

1. La notion d'ordre est présente, donc on va lister les différentes possibilités

$$\begin{aligned}
X_1(\Omega) &= [\![1,5]\!] \\
P(X_1 = 1) &= P(B) = \frac{1}{5} \quad P(X_1 = 2) = P(\overline{B}B) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5} \quad P(X_1 = 3) = P(\overline{B}\overline{B}B) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5} \\
P(X_1 = 4) &= P(\overline{B}\overline{B}\overline{B}B) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}, \quad P(X_1 = 5) = P(\overline{B}\overline{B}\overline{B}\overline{B}B) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{5} \\
X_2(\Omega) &= [\![1,5]\!] \\
P(X_2 = 1) &= P(V) = \frac{1}{5} \quad P(X_2 = 2) = P(\overline{V}V) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5} \quad P(X_2 = 3) = P(\overline{V}\overline{V}V) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5} \\
P(X_2 = 4) &= P(\overline{V}\overline{V}\overline{V}V) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}, \quad P(X_2 = 5) = P(\overline{V}\overline{V}\overline{V}\overline{V}) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{5} \\
E(X_1) &= \sum_{k=1}^{5} kP(X_1 = k) = 3 \quad E(X_1^2) = \sum_{k=1}^{5} k^2 P(X_1 = k) = 55 \quad V(X_1) = E\left(X_1^2\right) - (E(X_1))^2 = 11 - 3^2 = 2
\end{aligned}$$

Les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes car $P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = 0$ (on ne peut avoir au premier tirage à la fois la boule verte et la boule blanche) et $P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \neq P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1)$

2. Par une utilisation purement « abstraite », le tableau suivant montre que $X(\Omega) = [\![1,5]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1,5]\!]$

X : $X_1 \diagdown X_2$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5

Y : $X_1 \diagdown X_2$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	4
2	2	2	3	4	5
3	3	3	3	4	5
4	4	4	4	4	5
5	5	5	5	5	5

Néanmoins, en considérant la situation auquelle on est confronté, on constate que les évènements $X = 5$ et $Y = 1$ sont impossibles car ils impliquent respectivement que $X_1 = X_2 = 5$ et $X_1 = X_2 = 1$, ce qui est impossible puisque l'on ne peut obtenir deux boules en un tirage.

<u>X</u> :

$$\begin{aligned}
X(\Omega) &= [\![1,4]\!] \\
P(X = 1) &= \underbrace{P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1)}_{\text{impossible}} + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 2) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 3) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 4) \\
&\quad + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 5) + P(X_1 = 2 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 3 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 4 \cap X_2 = 1) \\
&\quad + P(X_1 = 5 \cap X_2 = 1) \\
&= P(BV) + P(BRV) + P(BRRV) + P(BRRRV) + P(VB) + P(VRB) + P(VRRB) + P(VRRRB) \\
&= \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \\
&\quad + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \\
&= 8 \times \frac{1}{5 \times 4} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= \underbrace{P(X_1=2\cap X_2=2)}_{\text{impossible}} + P(X_1=2\cap X_2=3) + P(X_1=2\cap X_2=4) + P(X_1=2\cap X_2=5) \\
&\quad + P(X_1=3\cap X_2=2) + P(X_1=4\cap X_2=2) + P(X_1=5\cap X_2=2) \\
&= P(RBV) + P(RBRV) + P(RBRRV) + P(RVB) + P(RVRB) + P(RVRRB) \\
&= \frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1} + \frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1} \\
&= 6\times\frac{1}{5\times 4} = \frac{3}{10} \\
P(X=3) &= \underbrace{P(X_1=3\cap X_2=3)}_{\text{impossible}} + P(X_1=3\cap X_2=4) + P(X_1=3\cap X_2=5) + P(X_1=4\cap X_2=3) \\
&\quad + P(X_1=5\cap X_2=3) \\
&= P(RRBV) + P(RRBRV) + P(RRVB) + P(RRVRB) \\
&= \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1} = 4\times\frac{1}{5\times 4} = \frac{1}{5} \\
P(X=4) &= \underbrace{P(X_1=4\cap X_2=4)}_{\text{impossible}} + P(X_1=4\cap X_2=5) + P(X_1=5\cap X_2=4) = P(RRRBV) + P(RRRVB) \\
&= \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1} = 2\times\frac{1}{5\times 4} = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Un calcul direct nous donne $E(X)=2$.

<u>Y</u> : En procédant de même, donc je ne détaille pas les calculs, on a :

$$\begin{aligned}
Y(\Omega) &= [\![2,5]\!] \\
P(Y=2) &= P(X_1=1\cap X_2=2) + P(X_1=2\cap X_2=1) = P(BV) + P(VB) = 2\times\frac{1}{5\times 4} = \frac{1}{10} \\
P(Y=3) &= P(X_1=1\cap X_2=3) + P(X_1=2\cap X_2=3) + \underbrace{P(X_1=3\cap X_2=3)}_{\text{impossible}} + P(X_1=3\cap X_2=1) \\
&\quad + P(X_1=3\cap X_2=2) \\
&= P(BRV) + P(RBV) + P(RVB) = 4\times\frac{1}{5\times 4} = \frac{1}{5} \\
P(Y=4) &= P(X_1=1\cap X_2=4) + P(X_1=2\cap X_2=4) + P(X_1=3\cap X_2=4) + \underbrace{P(X_1=4\cap X_2=4)}_{\text{impossible}} \\
&\quad + P(X_1=4\cap X_2=1) + P(X_1=4\cap X_2=2) + P(X_1=4\cap X_2=3) \\
&= P(BRRV) + P(RBRV) + P(RRBV) + P(VRRB) + P(RVRB) + P(RRVB) = 6\times\frac{1}{5\times 4} = \frac{3}{10} \\
P(Y=5) &= P(X_1=1\cap X_2=5) + P(X_1=2\cap X_2=5) + P(X_1=3\cap X_2=5) + P(X_1=4\cap X_2=5) \\
&\quad + \underbrace{P(X_1=5\cap X_2=5)}_{\text{impossible}} + P(X_1=5\cap X_2=1) + P(X_1=5\cap X_2=2) + P(X_1=5\cap X_2=3) \\
&\quad + P(X_1=5\cap X_2=4) \\
&= P(BRRRV) + P(RBRRV) + P(RRBRV) + P(RRRBV) + P(VRRRB) + P(RVRRB) + P(RRVRB) + P \\
&= 8\times\frac{1}{5\times 4} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Un calcul direct nous donne $E(Y)=3$.

correction de l'exercice 5

1. On pioche 2 boules sans remise dans une urne contenant 8 boules dont 4 rouges. On ne peut piocher que 0,1 ou 2 boules rouges donc $V_{4,2}(\Omega)=\{0,1,2\}$ et $V_{4,2}$ suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(2,4,4)$

$$P(V_{4,2}=0) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{14},\quad P(V_{4,2}=1) = \frac{\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{4}{7},\quad P(V_{4,2}=2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{14}.\quad E(V_{4,2}) = 2\times\frac{4}{8} = 1$$

2. La variable $V_{n,p}$ suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(p,n,n)$. On pioche moins de boules que de boules rouges ($p<n$) donc il est possible de piocher jusqu'à p boules rouges. Il est alors aisé de constater que

$$V_{n,p}(\Omega) = \{0,..,p\}.\quad \forall k\in\{0,..,p\},\quad P(V_{n,p}=k) = \frac{\binom{n}{k}\times\binom{n}{p-k}}{\binom{2n}{p}}.$$

3. La loi de $V_{n,n}$ est donnée par :

$$V_{n,n}(\Omega) = \{0,..,n\}. \quad \forall k \in \{0,..,n\}, \quad P(V_{n,n}=k) = \frac{\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$$

   Pour l'égalité demandée, il suffit d'utiliser que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(V_{n,n}=k) = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} P(V_{n,n}=k) = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

4. On pioche 5 boules sans remise dans une urne contenant 8 boules dont 4 rouges. On est obligé d'obtenir au minimum 1 boule rouge et au plus 4 boules rouges. Il est alors facile de vérifier que $V_{4,2}(\Omega) = \{1,2,3,4\}$ et $V_{4,2}$ suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(5,4,4)$

$$\begin{aligned} P(V_{4,5} &= 1) = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{4}{4}}{\binom{8}{5}} = \frac{1}{14}, \quad P(V_{4,5}=2) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{4}{3}}{\binom{8}{5}} = \frac{3}{7}, \\ P(V_{4,5} &= 3) = \frac{\binom{4}{3} \times \binom{4}{2}}{\binom{8}{5}} = \frac{3}{7} \quad P(V_{4,5}=4) = \frac{\binom{4}{4} \times \binom{4}{1}}{\binom{8}{5}} = \frac{1}{14}. \end{aligned}$$

5. La variable $V_{n,p}$ suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(p,n,n)$. On pioche plus de boules que de boules rouges ($p > n$), le maximum de boules vertes piochées est alors n donc on doit piocher au moins $p-n$ boules rouges et on ne peut en piocher plus de n. Il est alors aisé de constater que

$$V_{n,p}(\Omega) = \{p-n,..,n\} \quad \forall k \in \{p-n,..,n\} \quad P(V_{n,p}=k) = \frac{\binom{n}{k} \times \binom{n}{p-k}}{\binom{2n}{p}}$$

correction de l'exercice 6

1. On considère l'expérience $\mathcal{E}$: " lancer le dé " ainsi que l'évènement A : " obtenir un 6 ". On effectue N expériences indépendantes identiques à $\mathcal{E}$ donc Z, qui est le nombre de réalisation de l'évènement A au cours des N expériences, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, P(A)) = \mathcal{B}\left(N, \dfrac{1}{6}\right)$ donc

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= [\![0,N]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,N]\!], \quad P(Z=k) = \binom{N}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(1-\frac{1}{6}\right)^{N-k} = \binom{N}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k} \\ E(Z) &= N \times \frac{1}{6} = \frac{N}{6}, \quad V(Z) = N \times \frac{1}{6} \times \left(1-\frac{1}{6}\right) = \frac{5N}{36} \end{aligned}$$

2. On lance 1 fois le dé. Si l'on obtient le 6, on lance la pièce et on obtient soit 0 pile, soit 1 pile, si l'on obtient pas le 6, on ne lance pas la pièce donc on obtient 0 pile. Par conséquent, $X(\Omega) = \{0,1\}$. La connaissance du nombre de piles obtenus dépend de l'obtention du 6 ou non, c'est-à-dire des évènements $(Z=0)$ et $(Z=1)$. En utilisant ce système complet d'évènements, on a

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(Z=0 \cap X=0) + P(Z=1 \cap X=0) = P(Z=0)P_{(Z=0)}(X=0) + P(Z=1)P_{(Z=1)}(X=0) \\ &= \frac{5}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times (1-p) = 1 - \frac{p}{6} \\ P(X=1) &= P(\underbrace{Z=0 \cap X=1}_{\text{impossible}}) + P(Z=1 \cap X=1) = P(Z=1)P_{(Z=1)}(X=1) = \frac{1}{6} \times p = \frac{p}{6} \end{aligned}$$

   Pour la justification des calculs de probabilités, se réferer à la question 4.a)

3. On lance 2 fois le dé.

   - Si l'on obtient deux fois le 6, on lance deux fois la pièce et on obtient soit 0 pile, soit 1 pile, soit 2 piles,
   - Si l'on obtient une fois le 6, on lance la pièce et on obtient soit 0 pile, soit 1 pile,
   - Si l'on obtient pas le 6, on ne lance pas la pièce donc on obtient 0 pile.

Par conséquent, $X(\Omega) = \{0,1,2\}$. La connaissance du nombre de piles obtenus dépend du nombre de 6 obtenus, c'est-à-dire des évènements $(Z=0),(Z=1),(Z=2)$. En utilisant ce système complet d'évènements, on a

$$\begin{aligned}
P\left(X=0\right) &= P(Z=0\cap X=0)+P(Z=1\cap X=0)+P(Z=2\cap X=0)\\
&= P(Z=0)P_{(Z=0)}(X=0)+P(Z=1)P_{(Z=1)}(X=0)+P(Z=2)P_{(Z=2)}(X=0)\\
&= \left(\frac{5}{6}\right)^2\times 1+2\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\times(1-p)+\left(\frac{1}{6}\right)^2\times(1-p)^2=\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}(1-p)\right)^2=\left(1-\frac{p}{6}\right)^2\\
P\left(X=1\right) &= P(\underbrace{Z=0\cap X=1}_{\text{impossible}})+P(Z=1\cap X=1)+P(Z=2\cap X=1)\\
&= P(Z=1)P_{(Z=1)}(X=1)+P(Z=2)P_{(Z=2)}(X=1)\\
&= 2\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\times p+\left(\frac{1}{6}\right)^2\times 2p(1-p)=2p\left(\frac{1}{6}\right)\left[\frac{5}{6}+\frac{1}{6}(1-p)\right]=\frac{p}{3}\left(1-\frac{p}{6}\right)\\
P\left(X=2\right) &= P(\underbrace{Z=0\cap X=2}_{\text{impossible}})+P(\underbrace{Z=1\cap X=2}_{\text{impossible}})+P(Z=2\cap X=2)\\
&= P(Z=2)P_{(Z=2)}(X=2)=\left(\frac{1}{6}\right)^2p^2=\left(\frac{p}{6}\right)^2
\end{aligned}$$

Pour la justification des calculs de probabilités, se réferer à la question 4.a)

4. (a) $P_{(Z=n)}(X=k)$: L'évènement $(Z=n)$ est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement $(X=k)$, c'est-à-dire que l'on a obtenu n fois la face "6", donc on lance n fois le dé, et on souhaite obtenir k "pile". Etant donné que l'on peut obtenir strictement plus de "pile" (k ici) que de faces "6' (n ici), l'évènement est impossible si $k>n$ donc $P_{(Z=n)}(X=k)=0$ lorsque $k>n$. Si $k\leqslant n$, l'obtention de k "piles" en n lancers s'inscrit clairement dans le cadre binomial donc $P_{(Z=n)}(X=k)=\binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}$.
   Par conséquent, on a
   $$P_{(Z=n)}(X=k)=\begin{cases}0 & \text{si } k>n\\ \binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k} & \text{si } k\leqslant n\end{cases}$$
   (b) Bien entendu, l'évènement $n>N$ est impossible (on ne peut obtenir plus de N faces "6" car on ne lance le dé que N fois) donc $P\left(X=k \text{ et } Z=n\right)=0$ si $n>N$. Si $n\leqslant N$, d'après les résultats des questions 1 et 2, on a
   $$\begin{aligned}
   P\left(X=k \text{ et } Z=n\right) &= P(Z=n)P_{(Z=n)}(X=k)=\binom{N}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}P_{(Z=n)}\\
   &= \begin{cases}0 & \text{si } k>n\\ \binom{n}{k}\binom{N}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}p^k\left(1-p\right)^{n-k} & \text{si } k\leqslant n\end{cases}
   \end{aligned}$$

correction de l'exercice 7

1. Soit on effectue un test global et il réussit, soit on effectue un test global, il échoue et on effectue n tests supplémentaires, donc on effectue soit 1 test, soit $n+1$ tests donc $Y_n(\Omega)=\{1,n+1\}$.
   $$P(Y_n=1)=(0,98)^n \quad P(Y_n=n+1)=1-(0,98)^n$$
   En effet, $(Y_n=1)$ signifie qu'aucune pièce n'est défectueuse, chacune ayant une probabilité d'être défectueuse égale à $1-0,02=0,98$ et les défauts des pièces étant supposées indépendants, on a $P(Y_n=1)=(0,98)^n$ donc $P(Y_n=n+1)=1-P(Y_n=1)$.
2. $E(Y_n)=1\times P(Y_n=1)+(n+1)P(Y_n=n+1)=(0,98)^n+(n+1)(1-(0,98)^n)=n+1-n(0,98)^n$
   donc $E(Y_n)-n=1-n(0.98)^n$
3. Cette fonction est dérivable sur $[2,+\infty[$ (comme produit et composée de tels fonctions) et l'on a
   $$\begin{aligned}
   f'(x) &= -\exp(x\ln(0,98))-x(\ln 0.98)\exp(x\ln(0,98))=-\exp(x\ln(0,98))\left[1+x\ln(0,98)\right]\\
   f'(x) &> 0\Leftrightarrow-(1+x\ln(0,98))>0\Leftrightarrow 1+x\ln(0,98)<0\Leftrightarrow x\ln(0,98)<-1\underset{\ln(0,98)<0}{\Leftrightarrow}x>-\frac{1}{\ln(0,98)}
   \end{aligned}$$
   On en déduit le tableau de variation de f

x	2		$-1/\ln(0,98)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$\simeq -0,92$	$\searrow$	$\simeq -17,20$	$\nearrow$	1

(pour la limite en $+\infty$, on utilise les croissances comparées).La fonction f est strictement décroissante et strictement négative $\left[2, -\dfrac{1}{\ln(0,98)}\right]$ et sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{\ln(0,98)}, +\infty\right[$, elle y est strictement croissante, donc elle réalise une bijection de $\left[-\dfrac{1}{\ln(0,98)}, +\infty\right[$ sur $f\left(\left[-\dfrac{1}{\ln(0,98)}, +\infty\right[\right) = \left[f\left(-\dfrac{1}{\ln(0,98)}\right), 1\right[$. Comme $0 \in \left[f\left(-\dfrac{1}{\ln(0,98)}\right), 1\right[$, on est assuré de l'existence et de l'unicité d'un réel α tel que $f(\alpha) = 0$. En outre, d'après les conclusions obtenues, on est assuré que $f(x) < 0$ sur $[0, \alpha[$ et $f(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.
Puisque $f(278) < 0$, $f(\alpha) = 0$ (α est solution de $f(x) = 0$) et $f(279) > 0$, on a $f(278) < f(\alpha) < f(279)$ et la fonction f étant strictement croissante et bijective sur $[278, 279]$, on peut conclure que $278 < \alpha < 279$

4. D'après la question 3, on a $E(Y_n) - n < 0$ si $n \leqslant 278$ et $E(Y_n) - n \geqslant 0$ si $n \geqslant 279$ donc on effectue en moyenne plus de tests avec la seconde stratégie si l'on dispose de plus de 279 pièces et on effectue moins de tests avec la seconde stratégie si l'on dispose de moins de 278 pièces. Ainsi, pour moins de 278 pièces, il est préférable d'utiliser la seconde stratégie et pour plus de 279 pièces, il est préférable d'utiliser la première stratégie.