CORRECTION DE L'EXERCICE 1

1. (a)

$$(E_1)\quad : \quad \left\{\begin{array}{r} 3x-2y+3z=x \\ x+2z=y \\ 2z=z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x-2y+3z=0 \\ x-y+2z=0 \\ z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} z=0 \\ x=y \end{array}\right. \Rightarrow S=\{(y,y,0),\quad y\in\mathbb{R}\}$$

$$(E_2)\quad : \quad \left\{\begin{array}{r} 3x-2y+3z=2x \\ x+2z=2y \\ 2z=2z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x-2y+3z=0 \\ x-2y+2z=0 \\ 0=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x-2y+3z=0 & \textit{Pivot pour } x \\ -z=0 & L_2\leftarrow L_2-L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} z=0 \\ x=2y \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad S=\{(2y,y,0),\quad y\in\mathbb{R}\}$$

$$(E_3)\quad : \quad \left\{\begin{array}{r} 3x-2y+3z=2x+2 \\ x+2z=2y+1 \\ 2z=2z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x-2y+3z=2 \\ x-2y+2z=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x-2y+3z=2 & \textit{Pivot pour } x \\ -z=-1 & L_2\leftarrow L_2-L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{r} z=1 \\ x=2y-1 \end{array}\right. \Rightarrow S=\{(2y-1,y,1),\quad y\in\mathbb{R}\}$$

(b) On procède par les opérations élémentaires sur les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \vdots\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \vdots\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \text{«}\textit{Pivot}\text{»} \\ L_2\leftarrow L_2-L_1 \end{array}\right.$$

La nouvelle matrice est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc elle est inversible, ce qui implique l'inversibilité de P. On poursuit en effectuant le pivot inversé.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \vdots\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1\leftarrow L_1+L_3 \\ L_2\leftarrow L_2-L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \vdots\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \ L_1\leftarrow L_1+2L_2 \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \vdots\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \ L_2\leftarrow -L_2 \right. \Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (PP^{-1}=I \text{ par calcul direct})$$

$$PT=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad PTP^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=A$$

2. (a) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: " il existe un réel α_n tel que $T^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ "

Initialisation $n=0$: $T^0=I$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^0 & \alpha_0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc en choisissant $\alpha_0=0$, il existe bien un réel α_0 tel que $T^0=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^0 & \alpha_0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix}$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_0)$.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et démontrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons qu'il existe un réel α_n tel que $T^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ et montrons qu'il existe un réel α_{n+1} tel que $T^{n+1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

$$T^{n+1}=T^nT=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2\alpha_n+2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, en choisissant le réel $\alpha_{n+1}=2\alpha_n+2^n$, on a bien $T^{n+1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & \alpha_{n+1} \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence. D'après la preuve, on a $\alpha_0=0$ ainsi que la relation $\forall n\in\mathbb{N},\quad \alpha_{n+1}=2\alpha_n+2^n$.

(b) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: $\alpha_n=n2^{n-1}$
Initialisation $n=0$:On a $\alpha_0=0$ et $0\times 2^{0-1}=0$ donc $\alpha_0=0\times 2^{0-1}$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_0)$.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $\alpha_n = n2^{n-1}$ et montrons que $\alpha_{n+1} = (n+1)2^n$.

$$\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n = 2(n2^{n-1}) + 2^n = n2^n + 2^n = (n+1)2^n$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

3. On procède de nouveau par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : A^n = PT^nP^{-1}$.
Initialisation $n = 0$: On a $A^0 = I$ et $PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ donc $A^0 = PT^0P^{-1}$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_0)$.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $A^n = PT^nP^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}$. D'après la question 1.b), on a $A = PTP^{-1}$ donc on peut écrire

$$A^{n+1} = A^nA \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} PT^nP^{-1}PTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence. On en déduit immédiatement que

$$\begin{aligned} PT^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} & (n-1)2^n \\ 1 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ A^n &= PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} & (n-1)2^n \\ 1 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & -2^{n+1}+2 & 2^n(n+1)-1 \\ 2^n-1 & -2^n+2 & 2^n(1+\frac{n}{2})-1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarquez que pour $n = 0$ et $n = 1$, la formule est vraie.

4. On se lance dans un calcul directement en écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$TM = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+g & h+2e & 2f+i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} \quad MT = \begin{pmatrix} a & 2b & b+2c \\ d & 2e & 2f+e \\ g & 2h & h+2i \end{pmatrix}$$

$$MT = TM \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cc} a = a & 2f+i = 2f+e \\ b = 2b & 2g = g \\ c = b+2c & 2h = 2h \\ 2d+g = d & 2i = h+2i \\ h+2e = 2e & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} b = 0 \\ b+c = 0 \\ d+g = 0 \\ h = 0 \\ i = e \\ g = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} b = 0 \\ c = 0 \\ g = 0 \\ d = 0 \\ h = 0 \\ i = e \end{array}\right. \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \quad (a,e,f) \in \mathbb{R}^3$$

5. (a) $M' = P^{-1}MP \Leftrightarrow PM'P^{-1} = M$ (multiplication à gauche par P et à droite par P^{-1}, de part et d'autre de l'égalité).

$$AM = MA \Leftrightarrow PTP^{-1}PM'P^{-1} = PM'P^{-1}PTP^{-1} \Leftrightarrow PTM'P^{-1} = PM'TP^{-1} \Leftrightarrow TM' = M'T$$

par multiplication à gauche par P^{-1} et à droite par P, de part et d'autre de l'égalité

(b) En combinant les questions 4 et 5.a), on en déduit donc $M'T = TM'$ si et seulement si $M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

On en déduit alors la caractérisation suivante (la dernière égalité s'obtenant par calcul direct) :

$$AM = MA \Leftrightarrow TM' = M'T \Leftrightarrow M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 2

1. La position du mobile à l'instant $(n+1)$ dépendant de sa position à l'instant n, on va utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_n, B_n, C_n, D_n)

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(\underbrace{C_n \cap A_{n+1}}_{=\emptyset}) + P(\underbrace{D_n \cap A_{n+1}}_{=\emptyset}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(B_{n+1}) &= P(\underbrace{A_n \cap B_{n+1}}_{=\emptyset}) + P(\underbrace{B_n \cap B_{n+1}}_{=\emptyset}) + P(C_n \cap B_{n+1}) + P(\underbrace{D_n \cap B_{n+1}}_{=\emptyset}) = P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3}P(C_n) \\
P(C_{n+1}) &= P(\underbrace{A_n \cap C_{n+1}}_{=\emptyset}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(\underbrace{C_n \cap C_{n+1}}_{=\emptyset}) + P(\underbrace{D_n \cap C_{n+1}}_{=\emptyset}) = P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}P(B_n) \\
P(D_{n+1}) &= P(\underbrace{A_n \cap D_{n+1}}_{=\emptyset}) + P(\underbrace{B_n \cap D_{n+1}}_{=\emptyset}) + P(C_n \cap D_{n+1}) + P(D_n \cap D_{n+1}) = P(C_n)P_{C_n}(D_{n+1}) + P(D_n)P_{D_n}(D_{n+1}) \\
&= \frac{2}{3}P(C_n) + P(D_n)
\end{aligned}$$

On en déduit donc $\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{3}b_n \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}c_n \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{3}b_n \\ d_{n+1} = \dfrac{2}{3}c_n + d_n \end{array}\right.$

2. L'égalité $U_{n+1} = MU_n$ est évidente. Pour l'égalité suivante, on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : U_n = M^nU_0$.
Initialisation $n = 0$: On a $M^0U_0 = IU_0 = U_0$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_0)$.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $U_n = M^nU_0$ et montrons que $U_{n+1} = M^{n+1}U_0$.
$$U_{n+1} = MU_n \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} MM^nU_0 = M^{n+1}U_0$$
ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

3. (a) On procède par identification

$$M = aA + bB + cC \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}c & \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b & -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c & -\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}c & c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} c = 1 \\ -\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}c = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c = 0 \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 0 \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} c = 1 & \\ -a - 2b = -\frac{1}{3} & L_2 \leftarrow 4L_2 \\ a - 2b = -1 & L_3 \leftarrow 4L_3 \\ a + b = 0 & L_4 \leftarrow 2L_4 \\ -a + b = \frac{2}{3} & L_5 \leftarrow 2L_5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} c = 1 & \\ -a - 2b = -\frac{1}{3} & \\ -4b = -\frac{4}{3} & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ -b = -\frac{1}{3} & L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \\ 3b = 1 & L_5 \leftarrow L_5 - L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} c = 1 \\ b = \frac{1}{3} \\ a = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

On a donc : $M = -\dfrac{1}{3}A + \dfrac{1}{3}B + C$

(b) Il s'agit de montrer l'égalité $M^n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n A + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n B + 1^nC = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n A + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n B + C$

Pour cela, on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : M^n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n A + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n B + C$.

Initialisation $n = 0$: On a $M^0 = I$ et ce
$$\left(-\frac{1}{3}\right)^0 A + \left(\frac{1}{3}\right)^0 B + C = A + B + C = I \quad \text{(par calcul direct)}$$
donc $M^0 = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^0 A + \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 B + C$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_0)$.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $M^n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n A + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n B + C$

et montrons que $M^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} A + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} B + C$. En utilisant la question 3.a) ainsi que les égalités admises par la question 3, on obtient

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M^n M \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n A + \left(\frac{1}{3}\right)^n B + C\right)\left(-\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + C\right) \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} A^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{3}AB + \left(-\frac{1}{3}\right)^n AC - \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{3}BA + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} B^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n BC \\
&\quad -\frac{1}{3}CA + \frac{1}{3}CB + C^2 \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} A + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} B + C
\end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence. On en déduit que

$$M^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n A + \left(\frac{1}{3}\right)^n B + C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n & -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

4. La combinaison de l'égalite $U_n = M^n U_0$ (question 3) et du calcul de M^n (question 4) nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_n = & a_0 + b_0\left(-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{4}\right) + c_0\left(\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}\right) \\ b_n = & b_0\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + c_0\left(-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ c_n = & b_0\left(-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + c_0\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ d_n = & b_0\left(\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}\right) + c_0\left(-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{4}\right) + d_0 \end{cases}$$

Puisque $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ appartiennent à $]-1,1[$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a_0 + \frac{3}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} d_n = \frac{1}{4}b_0 + \frac{3}{4}c_0 + d_0$$

Si $a_0 = c_0 = d_0 = 0$ et $b_0 = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{3}{4}$ et $\lim_{n\to+\infty} d_n = \frac{1}{4}$.

CORRECTION DU PROBLEME

I. Calcul matriciel

1. Un calcul direct nous donne $P^2 = I \Leftrightarrow PP = I$ donc P est inversible et son inverse est $P^{-1} = P$.

2. En remarquant que $(1-a)^2 = 1 - 2a + a^2$ et $(1-a)^3 = 1 - 3a + 3a^2 - 3a^3$, un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned}
PD(a) &= \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & -a & -2a^2 & -3a^3 \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^3 \\ 0 & 0 & 0 & -a^3 \end{pmatrix} \\
PD(a)P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1-a & 1-2a+a^2 & 1-3a+3a^2-a^3 \\ 0 & a & 2a-2a^2 & 3a-6a^2+3a^3 \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^2-3a^3 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & (1-a)^2 & (1-a)^3 \\ 0 & a & 2a(1-a) & 3a(1-a)^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^2(1-a) \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} = M(a)
\end{aligned}$$

3. $M(a)M(b) = PD(a)P^{-1}PD(b)P^{-1} = PD(a)D(b)P^{-1} = PD(ab)P^{-1} = M(ab)$
car $D(a)D(b) = D(ab)$ (produit direct de matrices diagonales).

4. On procède de nouveau par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : [M(a)]^n = M(a^n)$.
Initialisation $n = 0$: On a $[M(a)]^0 = I$ et $M(a^0) = M(1) = I$ (par calcul direct) donc $[M(a)]^0 = M(a^0)$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_0)$.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $[M(a)]^n = M(a^n)$ et montrons que $[M(a)]^{n+1} = M(a^{n+1})$. D'après la question 1.b), on a $A = PTP^{-1}$ donc on peut écrire
$$[M(a)]^{n+1} = [M(a)]^n M(a) \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} M(a^n)M(a) \underset{\text{question 3}}{=} M(a^n a) = M(a^{n+1})$$
ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

5. On commence par remarquer que $M(c) = I \Leftrightarrow \begin{cases} 1-c=0 & 2c(1-c)=0 \\ (1-c)^2=0 & 3c(1-c)^2 \\ (1-c)^3=0 & 3c^2(1-c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow c=1$
On a donc $M(a)M(b) = I \Leftrightarrow M(ab) = M(1) \Leftrightarrow ab = 1 \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{a}$. Ainsi $M(a)M\left(\dfrac{1}{a}\right) = I$ donc $M(a)$ est inversible et son inverse est $[M(a)]^{-1} = M(a^{-1})$.
On explicite $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est une matrice triangulaire dont certains éléments diagonaux sont nuls donc $M(0)$ n'est pas inversible.

II. Etude d'une expérience aléatoire

On introduit l'évènement P_k « obtenir pile avec la k-ième pièce lancée ». Les évènements P_1, P_2, P_3 sont mutuellement indépendants.

1. D'après l'énoncé, à la première étape, on lance 3 pièces. Pour calculer les probabilités demandées, on explicite chacun de ces évènements
$$\begin{aligned}
P(A_1) &= P(\overline{P}_1\overline{P}_2\overline{P}_3) = (1-p)^3 \\
P(B_1) &= P(P_1\overline{P}_2\overline{P}_3 \cup \overline{P}_1P_2\overline{P}_3 \cup \overline{P}_1\overline{P}_2P_3) = P(P_1\overline{P}_2\overline{P}_3) + P(\overline{P}_1P_2\overline{P}_3) + P(\overline{P}_1\overline{P}_2P_3) \\
&= p(1-p)^2 + (1-p)p(1-p) + (1-p)^2p = 3p(1-p)^2 \\
P(C_1) &= P(P_1P_2\overline{P}_3 \cup \overline{P}_1P_2P_3 \cup \overline{P}_1P_2P_3) = P(P_1P_2\overline{P}_3) + P(P_1\overline{P}_2P_3) + P(\overline{P}_1P_2P_3) \\
&= p^2(1-p) + p(1-p)p + (1-p)p^2 = 3p^2(1-p) \\
P(D_1) &= P(P_1P_2P_3) = p^3
\end{aligned}$$

2. Ceci est résumé dans le tableau suivant :

$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$	$P_{B_n}(A_{n+1}) = 1-p$	$P_{C_n}(A_{n+1}) = (1-p)^2$	$P_{D_n}(A_{n+1}) = (1-p)^3$
$P_{A_n}(B_{n+1}) = 0$	$P_{B_n}(B_{n+1}) = p$	$P_{C_n}(B_{n+1}) = 2p(1-p)$	$P_{D_n}(B_{n+1}) = 3p(1-p)^2$
$P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$	$P_{B_n}(C_{n+1}) = 0$	$P_{C_n}(C_{n+1}) = p^2$	$P_{D_n}(D_{n+1}) = 3p^2(1-p)$
$P_{A_n}(D_{n+1}) = 0$	$P_{B_n}(D_{n+1}) = 0$	$P_{C_n}(D_{n+1}) = 0$	$P_{D_n}(D_{n+1}) = p^3$

Justification des calculs de probabilités conditionnelles :
On commence par remarquer que l'on ne peut obtenir strictement plus de piles à l'étape $(n+1)$ que de piles obtenus à l'étape n puisque l'on ne relance à l'étape $(n+1)$ que les pièces ayant fourni pile à l'étape n. On a donc
$$P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = P_{A_n}(D_{n+1}) = P_{B_n}(C_{n+1}) = P_{B_n}(D_{n+1}) = P_{C_n}(D_{n+1}) = 0$$
$P_{A_n}(A_{n+1})$ *: L'évènement A_n est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement A_{n+1}, i.e. on a obtenu 0 pile à l'étape n et on souhaite obtenir 0 pile à l'étape $(n+1)$. Etant donné que l'on a obtenu 0 pile, on ne peut relancer des pièces à l'étape $n+1$ donc on est certain de n'avoir aucun pile donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$.*
$P_{B_n}(A_{n+1})$ *: L'évènement B_n est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement A_{n+1}, i.e. on a obtenu 1 pile à l'étape n et on souhaite obtenir 0 pile à l'étape $(n+1)$. Etant donné que l'on a obtenu 1 pile, on relance une seule pièce à l'étape $n+1$ donc $P_{B_n}(A_{n+1}) = P(\overline{P_1}) = 1-p$*
$P_{B_n}(B_{n+1})$ *: L'évènement B_n est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_{n+1}, i.e. on a obtenu 1 pile à l'étape n et on souhaite obtenir 1 pile à l'étape $(n+1)$. Etant donné que l'on a obtenu 1 pile, on relance une seule pièce à l'étape $n+1$ donc $P_{B_n}(B_{n+1}) = P(P_1) = p$*
$P_{C_n}(A_{n+1})$ *: L'évènement C_n est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement A_{n+1}, i.e. on a obtenu 2 piles à l'étape n et on souhaite obtenir 0 pile à l'étape $(n+1)$. Etant donné que l'on a obtenu 2 piles, on relance deux pièces*

à l'étape $n+1$ donc $P_{C_n}(A_{n+1}) = P(\overline{P_1}\,\overline{P_2}) = (1-p)^2$
$P_{C_n}(B_{n+1})$: L'évènement C_n est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_{n+1}, i.e. on a obtenu 2 piles à l'étape n et on souhaite obtenir 1 pile à l'étape $(n+1)$. Etant donné que l'on a obtenu 2 piles, on relance deux pièces à l'étape $n+1$ donc $P_{C_n}(B_{n+1}) = P(P_1\overline{P_2} \cup \overline{P_1}P_2) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$
$P_{C_n}(C_{n+1})$: L'évènement C_n est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement C_{n+1}, i.e. on a obtenu 2 piles à l'étape n et on souhaite obtenir 2 piles à l'étape $(n+1)$. Etant donné que l'on a obtenu 2 piles, on relance deux pièces à l'étape $n+1$ donc $P_{C_n}(C_{n+1}) = P(P_1P_2) = p^2$
$P_{D_n}(A_{n+1})$: L'évènement D_n est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement A_{n+1}, i.e. on a obtenu 3 piles à l'étape n et on souhaite obtenir 0 pile à l'étape $(n+1)$. Etant donné que l'on a obtenu 3 piles, on relance trois pièces à l'étape $n+1$ donc $P_{D_n}(A_{n+1}) = P(\overline{P_1}\,\overline{P_2}\,\overline{P_3}) = (1-p)^3$
$P_{D_n}(B_{n+1})$: L'évènement D_n est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_{n+1}, i.e. on a obtenu 3 piles à l'étape n et on souhaite obtenir 1 pile à l'étape $(n+1)$. Etant donné que l'on a obtenu 3 piles, on relance trois pièces à l'étape $n+1$ donc $P_{D_n}(B_{n+1}) = P(P_1\overline{P_2}\,\overline{P_3} \cup \overline{P_1}P_2\overline{P_3} \cup \overline{P_1}\,\overline{P_2}P_3) = p(1-p)^2 + (1-p)p(1-p) + (1-p)^2p = 3p(1-p)^2$
$P_{D_n}(C_{n+1})$: L'évènement D_n est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement C_{n+1}, i.e. on a obtenu 3 piles à l'étape n et on souhaite obtenir 2 piles à l'étape $(n+1)$. Etant donné que l'on a obtenu 3 piles, on relance trois pièces à l'étape $n+1$ donc $P_{D_n}(C_{n+1}) = P(P_1P_2\overline{P_3} \cup P_1\overline{P_2}P_3 \cup \overline{P_1}P_2P_3) = p^2(1-p) + p(1-p)p + (1-p)p^2 = 3p^2(1-p)$
$P_{D_n}(D_{n+1})$: L'évènement D_n est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement D_{n+1}, i.e. on a obtenu 3 piles à l'étape n et on souhaite obtenir 3 piles à l'étape $(n+1)$. Etant donné que l'on a obtenu 3 piles, on relance trois pièces à l'étape $n+1$ donc $P_{D_n}(D_{n+1}) = P(P_1P_2P_3) = p^3$

3. Le nombre de piles à l'étape $(n+1)$ dépend prioritairement du nombre de pièces lancers à cette étape donc du nombre de piles obtenus à l'étape n, i.e. des évènements A_n, B_n, C_n, D_n. La famille (A_n, B_n, C_n, D_n) est un système complet d'évènements et la formule des probabilités totales nous donne

$$\begin{aligned}
P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) + P(D_n \cap A_{n+1}) = \\
&= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) + P(D_n)P_{D_n}(A_{n+1}) \\
&= P(A_n) + (1-p)P(B_n) + (1-p)^2P(C_n) + (1-p)^3P(D_n) \\
P(B_{n+1}) &= P(\underbrace{A_n \cap B_{n+1}}_{=\emptyset}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) + P(D_n \cap B_{n+1}) \\
&= P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) + P(D_n)P_{D_n}(B_{n+1}) \\
&= pP(B_n) + 2p(1-p)P(C_n) + 3p(1-p)^2P(D_n) \\
P(C_{n+1}) &= P(\underbrace{A_n \cap C_{n+1}}_{=\emptyset}) + P(\underbrace{B_n \cap C_{n+1}}_{=\emptyset}) + P(C_n \cap C_{n+1}) + P(D_n \cap C_{n+1}) \\
&= P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) + P(D_n)P_{D_n}(C_{n+1}) = p^2P(C_n) + 3p^2(1-p)P(D_n) \\
P(D_{n+1}) &= P(\underbrace{A_n \cap D_{n+1}}_{=\emptyset}) + P(\underbrace{B_n \cap D_{n+1}}_{=\emptyset}) + P(\underbrace{C_n \cap D_{n+1}}_{=\emptyset}) + P(D_n \cap D_{n+1}) \\
&= P(D_n)P_{D_n}(D_{n+1}) = p^3P(D_n)
\end{aligned}$$

4. (a) Il est immédiat que $U_{n+1} = M(p)U_n$.
   (b) on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: $U_n = [M(p)]^nU_0$.
   Initialisation $n = 0$: On a $[M(p)]^0U_0 = IU_0 = U_0$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_0)$.
   Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, i.e. supposons que $U_n = [M(p)]^nU_0$ et montrons que $U_{n+1} = [M(p)]^{n+1}U_0$.

$$U_{n+1} = M(p)U_n \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} M(p)[M(p)]^nU_0 = [M(p)]^{n+1}U_0$$

   ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
   (c) On a $U_n = [M(p)]^nU_0 = M(p^n)U_0$ ce qui nous donne

$$\begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \\ P(D_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-p^n & (1-p^n)^2 & (1-p^n)^3 \\ 0 & p^n & 2p^n(1-p^n) & 3p^n(1-p^n)^2 \\ 0 & 0 & p^{2n} & 3p^{2n}(1-p^n) \\ 0 & 0 & 0 & p^{3n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-p^n)^3 \\ 3p^n(1-p^n)^2 \\ 3p^{2n}(1-p^n) \\ p^{3n} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P(A_n) = (1-p^n)^3 \quad P(B_n) = 3p^n(1-p^n)^2 \quad P(C_n) = 3p^{2n}(1-p^n) \quad P(D_n) = p^{3n}$$