

correction de l'exercice 1

Il s'agit d'une suite récurrente d'ordre 2, linéaire et à coefficients constants. Son équation caractéristique est $x^2 = \frac{x+1}{6}$ dont les racines sont $x = -\frac{1}{3}$ et $x = \frac{1}{2}$. Par conséquent, il existe deux réels α, β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \alpha \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Détermination des constantes α et β .

$$\begin{cases} \alpha \left(-\frac{1}{3}\right)^0 + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^0 = z_0 \\ \alpha \left(-\frac{1}{3}\right)^1 + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^1 = z_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = z_0 \\ -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta = z_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{3}\alpha = z_0 - 2z_1 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \frac{5}{2}\beta = z_0 + 3z_1 & L_2 \leftarrow L_1 + 3L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{5}z_0 - \frac{6}{5}z_1 \\ \beta = \frac{2}{5}z_0 + \frac{6}{5}z_1 \end{cases}$$

La suite z s'écrit donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \left(\frac{3}{5}z_0 - \frac{6}{5}z_1\right) \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{5}z_0 + \frac{6}{5}z_1\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

correction de l'exercice 2

Monotonie de la suite u :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^n \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} \\ &= \left(\frac{2}{(4n+1)(4n+3)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{2}{(4n+1)(4n+3)} > 0 \end{aligned}$$

donc la suite u est croissante.

Monotonie de la suite v

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{4(n+1)-1} \right) - \left(u_n + \frac{1}{4n-1} \right) = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n-1} \\ &= \frac{2}{(4n+1)(4n+3)} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n-1} = \frac{2(4n-1) + (4n+1)(4n-1) - (4n+1)(4n+3)}{(4n+1)(4n+3)(4n-1)} \\ &= \frac{-8n-6}{(4n+1)(4n+3)(4n-1)} < 0 \end{aligned}$$

donc la suite v est décroissante.

Pour finir, il est immédiat que $v_n - u_n = \frac{1}{4n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc les suites u et v sont bien adjacentes, ce qui implique qu'elles convergent vers la même limite L .

correction de l'exercice 3

1. (a) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \geq 0$

Initialisation $n = 0$: $u_0 \geq 0$ d'après l'énoncé donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $u_n \geq 0$ et montrons que $u_{n+1} \geq 0$. La relation de récurrence nous donne

$$u_{n+1} = \frac{\overbrace{2(u_n)^2}^{\geq 0} + \overbrace{2u_n}^{\geq 0} + 1}{\underbrace{2u_n + 1}_{\geq 0}} \geq 0$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

- (b) La première minoration représentant une relation (ici une inégalité) entre deux termes successifs de la suite u , la preuve s'établit directement et non par récurrence. Pour cela, nous allons étudier le signe de la différence

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{2}\right) &= u_{n+1} = \frac{2(u_n)^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1} - \left(u_n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2(u_n)^2 + 2u_n + 1 - \left(u_n + \frac{1}{2}\right)(2u_n + 1)}{2u_n + 1} \\ &= \frac{2(u_n)^2 + 2u_n + 1 - \left(2(u_n)^2 + u_n + u_n + \frac{1}{2}\right)}{2u_n + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{2u_n + 1} \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La seconde minoration est une minoration entre le terme générale de la suite et une autre suite, on essaie une récurrence (qui va convenir ici)

On pose $(\mathcal{P}_n) : u_n \geq u_0 + \frac{n}{2}$.

Initialisation $n = 0 : u_0 + \frac{0}{2} = u_0$ d'où l'inégalité $u_0 \geq u_0 + \frac{0}{2}$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $u_n \geq u_0 + \frac{n}{2}$ et montrons que $u_{n+1} \geq u_0 + \frac{n+1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} u_{n+1} \geq u_n + \frac{1}{2} \\ u_n \geq u_0 + \frac{n}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow u_{n+1} \geq \left(u_0 + \frac{n}{2}\right) + \frac{1}{2} = u_0 + \frac{n+1}{2}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

(c) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_0 + \frac{n}{2}\right) = +\infty$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0 + \frac{n}{2}$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. (a) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \leq -1$

Initialisation $n = 0 : u_0 \leq -10$ d'après l'énoncé donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $u_n \leq -1$ et montrons que $u_{n+1} \leq -1$. Pour cela, nous allons étudier le signe de $u_{n+1} - (-1) = u_{n+1} + 1$ (les encadrements directs de u_n ne fournissant rien, je laisse au lecteur le soin de le vérifier)

$$u_{n+1} + 1 = \frac{2(u_n)^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1} + 1 = \frac{2(u_n)^2 + 4u_n + 2}{2u_n + 1} = \frac{2((u_n)^2 + 2u_n + 1)}{2u_n + 1} = \frac{\overbrace{2(u_n + 1)^2}^{\geq 0}}{\underbrace{2u_n + 1}_{\leq 2(-1)+1=-1 \leq 0}} \leq 0$$

donc $u_{n+1} \leq -1$, ce qui montre que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie et cela achève la récurrence.

(b) Monotonie de u

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(u_n)^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1} - u_n = \frac{2(u_n)^2 + 2u_n + 1 - u_n(2u_n + 1)}{2u_n + 1} = \frac{\overbrace{u_n + 1}^{\leq -1+1=0}}{\underbrace{2u_n + 1}_{\leq 2(-1)+1=-1 \leq 0}} \geq 0$$

donc la suite u est croissante et elle est majorée par -1 donc elle converge vers une limite L qui vérifie $L \leq -1$.

(c) La fonction $x \mapsto \frac{2x^2 + 2x + 1}{2x + 1}$ est continue sur $] -\infty, -1]$ (comme le quotient de deux fonctions continues sur cet intervalle et dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle) et, en passant à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2(u_n)^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1}$, on obtient

$$L = \frac{2L^2 + 2L + 1}{2L + 1} \Leftrightarrow L(2L + 1) = 2L^2 + 2L + 1 \Leftrightarrow 0 = L + 1 \Leftrightarrow L = -1$$

Par conséquent, la suite u converge vers -1 .

correction de l'exercice 4

1. (a) Calcul de $f\left(\frac{3}{2}\right)$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7 \times \frac{3}{2} + 3}{2 \times \frac{3}{2} + 6} - \left[\frac{3}{2} + \frac{4}{9} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right) \right] = \frac{27}{9} - \frac{3}{2} = \frac{27}{2 \times 9} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (comme addition et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$). Sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{7(2x+6) - (7x+3)2}{(2x+6)^2} - \frac{4}{9} = \frac{36}{4(x+3)^2} - \frac{4}{9} = \frac{9}{(x+3)^2} - \frac{4}{9} = \frac{9^2 - 4(x+3)^2}{9(2x+6)^2} \\ &= \frac{[9 - 2(x+3)][9 + 2(x+3)]}{9(2x+6)} = \frac{[3-2x](15+2x)}{9(x+3)^2} \end{aligned}$$

Le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}_+$ est donné par

x	0		$3/2$		$+\infty$
$3-2x$		+	0	-	
$15+2x$		+		+	
$f'(x)$		+		-	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

ce qui implique que la fonction f est négative sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x \geq 0, f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{7x+3}{2x+6} \leq \frac{3}{2} + \frac{4}{9} \left(x - \frac{3}{2}\right)$

2. (a) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : 0 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$.

Initialisation $n = 0 : u_0 \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ d'après l'énoncé donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $0 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$.

Pour commencer $u_{n+1} = \frac{7u_n+3}{2u_n+6}$ est positif (quotient de 2 positifs), ensuite, on va étudier le signe de la différence $u_{n+1} - \frac{3}{2}$ (l'encadrement "à la main" de u_n ne donnant rien)

$$u_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{7u_n+3}{2u_n+6} - \frac{3}{2} = \frac{7u_n+3-3(u_n+3)}{2u_n+6} = \frac{4u_n-6}{2u_n+6} = \frac{2(\overbrace{2u_n-3}^{\leq 2(3/2)-3=0})}{\underbrace{2u_n+6}_{\geq 0}} \leq 0$$

donc $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$ et l'on a bien montré que $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

- (b) On se lance dans un calcul direct

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7u_n+3}{2u_n+6} - u_n = \frac{7u_n+3-u_n(2u_n+6)}{2u_n+6} = \frac{-2u_n^2+u_n+3}{2u_n+6} \left. \vphantom{\frac{7u_n+3}{2u_n+6}} \right\} \begin{array}{l} (u_n+1)(3-2u_n) \\ -2u_n^2+u_n+3 \end{array} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n+1)(3-2u_n)}{2u_n+6}$$

- (c) La question précédente 2.b) montre que la suite u est croissante (car $3-2u_n \geq 0$) et elle est majorée par $\frac{3}{2}$ (question 2.a)) donc elle converge et sa limite L vérifie $0 \leq L \leq \frac{3}{2}$.

La fonction $x \mapsto \frac{7x+3}{2x+6}$ est continue sur $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ et en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \frac{7u_n+3}{2u_n+6}$, on obtient

$$L = \frac{7L+3}{2L+6} \Leftrightarrow L(2L+6) = 7L+3 \Leftrightarrow 2L^2-L-3=0 \Leftrightarrow L=-1 \text{ ou } L=\frac{3}{2}$$

Puisque l'on sait que $0 \leq L \leq \frac{3}{2}$, on en déduit que nécessairement $L = \frac{3}{2}$.

3. (a) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \geq \frac{3}{2}$.

Initialisation $n = 0 : u_0 \geq \frac{3}{2}$ d'après l'énoncé donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $u_n \geq \frac{3}{2}$ et montrons que $u_{n+1} \geq \frac{3}{2}$.

On va étudier le signe de la différence $u_{n+1} - \frac{3}{2}$ (l'encadrement "à la main" de u_n ne donnant rien)

$$u_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{7u_n+3}{2u_n+6} - \frac{3}{2} = \frac{7u_n+3-3(u_n+3)}{2u_n+6} = \frac{4u_n-6}{2u_n+6} = \frac{2(\overbrace{2u_n-3}^{\geq 2(3/2)-3=0})}{\underbrace{2u_n+6}_{\geq 0}} \geq 0$$

donc $u_{n+1} \geq \frac{3}{2}$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

- (b) La minoration représentant une relation (ici une inégalité) entre deux termes successifs de la suite u , la preuve s'établit directement et non par récurrence.

D'après la question 1.b), on a $\forall x \geq 0$, $\frac{7x+3}{2x+6} \leq \frac{3}{2} + \frac{4}{9} \left(x - \frac{3}{2}\right)$. Soit n un entier, en remplaçant x par u_n dans cette inégalité, ce qui est possible car $u_n \geq \frac{3}{2} \geq 0$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{\frac{7u_n+3}{2u_n+6}}_{=u_{n+1}} \leq \frac{3}{2} + \frac{4}{9} \left(u_n - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow u_{n+1} \leq \frac{3}{2} + \frac{4}{9} \left(u_n - \frac{3}{2}\right)$$

- (c) Pour commencer, d'après la question 3.a), on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} \leq u_n$ donc il ne reste qu'à prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \frac{3}{2} + \left(\frac{4}{9}\right)^n \left(u_0 - \frac{3}{2}\right).$$

Pour cela, on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \leq \frac{3}{2} + \left(\frac{4}{9}\right)^n \left(u_0 - \frac{3}{2}\right)$.

Initialisation $n = 0$: $\frac{3}{2} + \left(\frac{4}{9}\right)^0 \left(u_0 - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + \left(u_0 - \frac{3}{2}\right) = u_0$ donc $u_0 \leq \frac{3}{2} + \left(\frac{4}{9}\right)^0 \left(u_0 - \frac{3}{2}\right)$, ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $u_n \leq \frac{3}{2} + \left(\frac{4}{9}\right)^n \left(u_0 - \frac{3}{2}\right)$ et montrons que $u_{n+1} \leq \frac{3}{2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} \left(u_0 - \frac{3}{2}\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} u_{n+1} \leq \frac{3}{2} + \frac{4}{9} \left(u_n - \frac{3}{2}\right) \quad (\text{question 3.b}) \\ u_n \leq \frac{3}{2} + \left(\frac{4}{9}\right)^n \left(u_0 - \frac{3}{2}\right) \quad (\mathcal{P}_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{3}{2} + \frac{4}{9} \left[\frac{3}{2} + \left(\frac{4}{9}\right)^n \left(u_0 - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} \leq \frac{3}{2} + \frac{4}{9} \left[\left(\frac{4}{9}\right)^n \left(u_0 - \frac{3}{2}\right) \right] \Leftrightarrow u_{n+1} \leq \frac{3}{2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} \left(u_0 - \frac{3}{2}\right)$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

- (d) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} + \left(\frac{4}{9}\right)^n \left(u_0 - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ (car $\frac{4}{9} \in]-1, 1[$), l'inégalité obtenue à la question précédente 3.c) permet d'appliquer le théorème d'encadrement, ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{2}$.

correction de l'exercice 5

- La fonction $g : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (c'est un polynôme), dérivable sur cet intervalle (c'est un polynôme) et sa dérivée vaut $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$ qui est strictement négative sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Par conséquent, la fonction g est strictement décroissante et continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc elle réalise une bijection de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ sur $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[-\frac{3}{8}, 1\right]$.

Puisque $0 \in \left[-\frac{3}{8}, 1\right]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par g dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$).

- $\frac{x^3 + 6x + 1}{9} = x \Leftrightarrow x^3 + 6x + 1 = 9x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0$

Par conséquent, les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont exactement les solutions de l'équation $g(x) = 0$. Comme cette dernière équation admet comme unique solution α sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on en déduit que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

3. On considère la fonction $h : x \mapsto f(x) - x = \frac{x^3 + 6x + 1}{9} - x = \frac{x^3 - 3x + 1}{9} = \frac{g(x)}{9}$.

La fonction g étant strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (question 1) donc sur $[0, \alpha]$. Comme $h(0) = \frac{g(0)}{9} = \frac{1}{9}$ et

$h(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{9} = 0$ (car α solution de l'équation $g(x) = 0$), on en déduit que la fonction h est positive sur $[0, \alpha]$, c'est-à-dire que $\forall x \in [0, \alpha], f(x) \geq x$.

4. On pose $(\mathcal{P}_n) : 0 \leq u_n \leq \alpha$.

Initialisation $n = 0$: $u_0 = 0$ et $\alpha \geq 0$ donc $0 \leq u_0 \leq \alpha$, ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $0 \leq u_n \leq \alpha$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

$$0 \leq u_n \leq \alpha \Rightarrow \frac{1}{9} \leq \underbrace{\frac{(u_n)^3 + 6u_n + 1}{9}}_{=u_{n+1}} \leq \frac{\alpha^3 + 6\alpha + 1}{9} = \alpha \quad (\alpha \text{ est solution de } f(x) = x) \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{9} \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

5. Puisque l'on a $\forall x \in [0, \alpha], f(x) \geq x$, en choisissant $x = u_n$ (ce qui est licite car $u_n \in [0, \alpha]$), on obtient $\underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} \geq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$.

6. La suite u est majorée par α (question 4) et croissante (question 5) donc elle converge et sa limite L vérifie $0 \leq L \leq \alpha$. Calcul de la limite : Puisque la fonction f est continue sur $[0, \alpha]$, en passant à limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on a $L = f(L)$. Donc L est solution de l'équation $f(x) = x$. Comme $0 \leq L \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, la limite L est une solution sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ de l'équation $f(x) = x$. La question 2 montre que la seule solution de cette équation sur cet intervalle est α donc $L = \alpha$ et la suite u converge vers α .

Correction du problème

1. (a)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left[\left(\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} \right) - \ln(n+1) \right] - \left[\left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - \ln(n) \right] = \left[\left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} + \frac{1}{n+1} \right) - \ln(n+1) \right] - \left[\left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - \ln(n) \right] \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0 \quad (\text{d'après l'encadrement (E)}) \end{aligned}$$

donc la suite u est décroissante.

- (b) On pose $(\mathcal{P}_n) : \ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq 1 + \ln(n)$.

Initialisation $n = 1$: $\ln 1 = 0$, $\sum_{p=1}^1 \frac{1}{p} = \frac{1}{1} = 1$, $1 + \ln 1 = 1$ donc on a bien $\ln 1 \leq \sum_{p=1}^1 \frac{1}{p} \leq 1 + \ln 1$, ce qui montre que $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq 1 + \ln(n)$

et montrons que $\ln(n+2) \leq \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} \leq 1 + \ln(n+1)$. En remarquant que $\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} + \frac{1}{n+1}$, on a

$$\left. \begin{aligned} \ln(n+1) &\leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq 1 + \ln(n) \quad (\mathcal{P}_n) \\ \ln(n+2) - \ln(n+1) &\leq \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \quad (E) \end{aligned} \right\} \\ \Rightarrow \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(n+1) &\leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \ln(n) + \ln(n+1) - \ln n \\ \Leftrightarrow \ln(n+2) &\leq \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} \leq 1 + \ln(n+1)$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(c) La question 1.b) montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{\ln(n+1) - \ln n}_{\geq 0} \leq u_n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u_n \leq 1.$$

(d) La suite u est décroissante (question 1.a) et minorée par 0 (question 1.c) donc elle converge (et sa limite est comprise en 0 et 1).

2. (a) On étudie le signe de $v_{n+1} - v_n$

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{p=(n+1)+1}^{2(n+1)} \frac{1}{p} - \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} = \sum_{p=n+2}^{2n+2} \frac{1}{p} - \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$$

Les indices communs aux deux sommes est constitué des indices compris entre $n+2$ et $2n$. En utilisant la relation de Chasles correspondant à ces indices communs, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(\sum_{p=n+2}^{2n} \frac{1}{p} + \sum_{p=2n+1}^{2n+2} \frac{1}{p} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{p=n+2}^{2n} \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{2(n+1) - (2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

donc la suite v est croissante.

(b) Pour tout $p \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, on a $n+1 \leq p \leq 2n \Leftrightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{n+1}$ donc en sommant sur $\llbracket n+1, 2n \rrbracket$, on obtient

$$v_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} \leq \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1}$$

(c) Le terme général de la somme $\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1}$ étant indépendant de l'indice de sommation p , on a simplement

$$\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} (2n - (n+1) + 1) = \frac{n}{n+1} \leq 1 \Rightarrow v_n \leq 1$$

(d) La suite v est croissante et majorée par 1 donc elle converge et sa limite est inférieure ou égale à 1.

(e)

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n &= \left[\left(\sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} \right) - \ln(2n) \right] - \left[\left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - \ln n \right] = \left[\left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) + \left(\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} \right) \right] - \left[\left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) \right] - \ln(2n) + \ln n \\ &= \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} + \ln \left(\frac{n}{2n} \right) = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} + \ln \left(\frac{1}{2} \right) = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} - \ln 2 = v_n - \ln 2 \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, on ne déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{2n} - u_n) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - \ln 2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln 2$.

Remarque : cette limite est bien comprise entre 0 et 1, ce qui est compatible avec la question 2.d).

3. (a) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : 0 \leq w_n \leq 1$.

Initialisation $n = 0$: $w_0 = 1$ donc $0 \leq w_0 \leq 1$ et $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $0 \leq w_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq w_{n+1} \leq 1$.

Pour commencer, $w_n \geq 0$ et $w_n^2 + w_n + 1 \geq 1 > 0$ donc w_{n+1} aussi (comme quotient de deux positifs). Ensuite, puisque l'on a évidemment $w_n^2 + w_n + 1 \geq w_n \geq 0$, le quotient $\frac{w_n}{w_n^2 + w_n + 1} = w_{n+1}$ est inférieur à 1 ("le plus petit divisé par le plus grand"), ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

$$(b) \quad w_{n+1} - w_n = \frac{w_n}{w_n^2 + w_n + 1} - w_n = w_n \left[\frac{1}{w_n^2 + w_n + 1} - 1 \right] = \underbrace{w_n}_{\geq 0} \underbrace{\frac{-w_n^2 - w_n}{w_n^2 + w_n + 1}}_{\leq 0} \leq 0$$

donc la suite w est décroissante. En outre, elle est minorée par 0 donc elle converge et sa limite L est comprise entre 0 et 1.

Calcul de la limite : Puisque la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2 + x + 1}$ est continue sur $[0, 1]$, en passant à la limite dans l'égalité

$w_{n+1} = \frac{w_n}{w_n^2 + w_n + 1}$, on obtient

$$L = \frac{L}{L^2 + L + 1} \Leftrightarrow L(L^2 + L + 1) = L \Leftrightarrow L^3 + L^2 + L = L \Leftrightarrow L^3 + L^2 = 0 \Leftrightarrow L^2(L + 1) = 0 \Leftrightarrow L \in \{0, -1\}$$

Puisque $L \in [0, 1]$, on en déduit que $L = 0$ et la suite u converge vers 0.

$$4. (a) \quad \frac{1}{w_{n+1}} = \frac{w_n^2 + w_n + 1}{w_n} = w_n + 1 + \frac{1}{w_n}.$$

$$(b) \quad \text{On pose } (\mathcal{P}_n) : \frac{1}{w_n} \geq n + 1.$$

Initialisation $n = 0$: $\frac{1}{w_0} = \frac{1}{1} = 1$ et $0 + 1 = 1$ donc $\frac{1}{w_0} \geq 0 + 1$, ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\frac{1}{w_n} \geq n + 1$ et montrons que $\frac{1}{w_{n+1}} \geq n + 2$. On a

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{w_n} \geq n + 1 \quad (\mathcal{P}_n) \\ \frac{1}{w_{n+1}} = w_n + 1 + \frac{1}{w_n} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{w_{n+1}} \geq n + 1 + 1 + \frac{1}{w_n} = n + 2 + \underbrace{\frac{1}{w_n}}_{\geq 0} \geq n + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{w_{n+1}} \geq n + 2$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

$$(c) \quad \text{On pose } (\mathcal{P}_n) : \frac{1}{w_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Initialisation $n = 1$: $\frac{1}{w_1} = w_0 + 1 + \frac{1}{w_0} = 1 + 1 + 1 = 3$ et $1 + 1 + \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1 + 1 + 1 = 3$ donc $\frac{1}{w_1} \leq 1 + 1 + \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k}$,

ce qui montre que $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\frac{1}{w_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et montrons que

$$\frac{1}{w_{n+1}} \leq (n + 1) + 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \Leftrightarrow \frac{1}{w_{n+1}} \leq n + 2 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

On a

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{w_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (\mathcal{P}_n) \\ \frac{1}{w_{n+1}} = w_n + 1 + \frac{1}{w_n} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{w_{n+1}} \leq w_n + 1 + n + 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = w_n + n + 2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

D'après la question 4.b), on a $\frac{1}{w_n} \geq n + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{w_n} \leq \frac{1}{n + 1}$ donc

$$\frac{1}{w_{n+1}} \leq \frac{1}{n + 1} + n + 2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = n + 2 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(d) On a

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq 1 + \ln(n) \quad (\text{question 1.b}) \\ \frac{1}{w_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (\text{question 4.c}) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{w_n} \leq n + 1 + 1 + \ln n = n + 2 + \ln n$$

(e) On a

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{w_n} \geq n+1 \quad (\text{question 4.b}) \\ \frac{1}{w_n} \leq n+2+\ln n \quad (\text{question 4.d}) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} w_n \leq \frac{1}{n+1} \\ w_n \geq \frac{1}{n+2+\ln n} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{n+2+\ln n} \leq w_n \leq \frac{1}{n+1}$$

(f) En multipliant par n l'encadrement de la question 4.e), on obtient

$$\frac{n}{n+2+\ln n} \leq nw_n \leq \frac{n}{n+1}$$

Calculons maintenant les limites des membres de gauche et de droite de cet encadrement

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+2+\ln n} &= \frac{n}{n \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{\ln n}{n} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{\ln n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1 \\ \frac{n}{n+1} &= \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

L'application du théorème d'encadrement nous donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} nw_n = 1$.