

**correction de l'exercice 1**

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (c'est un polynôme) et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 + 5 > 0$  donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2. Pour commencer, on a :  $x^3 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ .

La fonction  $f$  est continue (c'est un polynôme) et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  donc elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  (puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ ). Comme  $0 \in \mathbb{R}$  (autrement dit  $f(\mathbb{R})$ ),

l'équation  $f(x) = 0$  admet une et une seule solution sur  $\mathbb{R}$  (existence et unicité de l'antécédent sur  $\mathbb{R}$  de 0 par  $f$ ).

Par conséquent, l'équation  $x^3 + 5x - 1 = 0$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ .

3. On compare les images  $f(0)$ ,  $f(\alpha)$  et  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ . On a :

$$f(0) = -1, \quad f(\alpha) = 0, \quad (\alpha \text{ est solution de l'équation } f(x) = 0), \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{8}$$

De façon évidente, on a :  $f(0) < f(\alpha) < f\left(\frac{1}{2}\right)$  et puisque  $f$  est bijective et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ .

**correction de l'exercice 2**

$$1. \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 1 + y^2 - y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy - x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (2x - 1 + y^2 - y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (2xy - x) = 2y - 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy - x) = 2x$$

2. On commence par remarquer que  $(x, y) \in U = \left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[ \times ]0, 1[$  si et seulement si  $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$  et  $0 < y < 1$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 + y^2 - y = 0 \\ 2xy - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 + y^2 - y = 0 \\ x(2y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 + y^2 - y = 0 \\ \underbrace{x=0}_{\text{impossible}} \text{ ou } 2y - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 + y^2 - y = 0 \\ y = \frac{1}{2} (\in ]0, 1[) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{8} (\in \left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[) \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction  $f$  admet un unique point critique sur l'ouvert  $U$  qui est  $\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right)$ .

3. Puisque l'on est sur un ouvert, on peut appliquer la règle du " $rt - s^2$ "

$$r\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right) = 2 \quad s\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0 \quad t\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{5}{8} = \frac{5}{4} \quad (rt - s^2)\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{5}{4} - 0^2 = \frac{5}{2}$$

Par conséquent, puisque  $(rt - s^2)\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right) > 0$  et que  $r\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right) > 0$ , on en déduit que le point  $\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right)$  est un minimum de  $f$  sur  $U$  et que

$$f\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 - \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = -\frac{25}{64}$$

**correction de l'exercice 3**

1. (a) Calculons la limite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ , on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$  (car  $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ ) et comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ , il est immédiat que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$  donc la fonction  $f$  est continue en 0.

(b) On étudie pour cela le taux d'accroissement en 0

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \exp\left(-\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0,$$

ce qui entraîne que la fonction  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = 0$ .

2. (a) La fonction  $x \mapsto -\frac{1}{x}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  donc la fonction  $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$  l'est également. En outre, la fonction  $x \mapsto x$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , ce qui entraîne que la fonction  $f : x \mapsto x \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = 1 \times \exp\left(-\frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \left[1 + \frac{1}{x}\right]$$

Il est alors immédiat que  $f'(x) > 0$  lorsque  $x > 0$  (produit et somme de nombres strictement positifs)

- (b) Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ , on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = +\infty$ .

#### correction de l'exercice 4

1. (a) La fonction  $x \mapsto \frac{1+x}{1+e^x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  (somme de deux réels strictement positifs), ce qui entraîne que la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme différence de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et l'on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1(1+e^x) - (1+x)e^x}{(1+e^x)^2} - 1 = \frac{1+e^x - e^x - xe^x}{(1+e^x)^2} - \frac{(1+e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{1 - xe^x - (1+2e^x+e^{2x})}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{-xe^x - 2e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}(x+2+e^x) \end{aligned}$$

- (b) On suit le conseil de l'énoncé

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x} - x = \frac{1+x-x(1+e^x)}{1+e^x} = \frac{1-xe^x}{1+e^x}$$

En  $-\infty$  : Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = -\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , le quotient ci-dessus tend vers 1 donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ , ce qui implique que la droite d'équation  $y = 1$  est asymptote en  $-\infty$  à  $\mathcal{C}_g$ .

En  $+\infty$  : on factorise les termes dominants au numérateur et au dénominateur.

$$g(x) = \frac{1-xe^x}{1+e^x} = \frac{-xe^x \left(-\frac{1}{xe^x} + 1\right)}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{-xe^x}{e^x} \times \frac{-\frac{1}{xe^x} + 1}{e^{-x}+1} = \underbrace{-x}_{\rightarrow -\infty} \underbrace{\left(\frac{-\frac{1}{xe^x} + 1}{e^{-x}+1}\right)}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

$$\frac{g(x)}{x} = -\frac{\frac{1}{xe^x} + 1}{e^{-x}+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1$$

$$g(x) - (-x) = g(x) + x = \frac{1+x}{1+e^x} - x + x = \frac{1+x}{1+e^x} = \frac{x \left(\frac{1}{x} + 1\right)}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{x}{e^x} \times \frac{\frac{1}{x} + 1}{e^{-x}+1}$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  et que le quotient tend vers 1, on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x)] = 0$ . Autrement dit, la droite d'équation  $y = -x$  est asymptote en  $+\infty$  à  $\mathcal{C}_g$ .

2. L'équation (E) est équivalente à l'équation  $g(x) = 0$  avec  $x$  dans  $\mathbb{R}_+$ .

La fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  (même justification que la dérivabilité en remplaçant le terme "dérivable" par "continue" à et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  (car  $g'(x) < 0$  sur  $\mathbb{R}_+$  d'après la question 1.a)) donc la fonction  $g$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $g(\mathbb{R}_+) = ]-\infty, 1]$  (car  $g(0) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  d'après la question 1.b)).

Puisque  $0 \in ]-\infty, 1]$ , on en déduit que l'équation  $g(x) = 0$  admet une et une seule solution sur  $\mathbb{R}_+$  (existence et unicité de l'antécédent de 0 par  $g$  sur  $\mathbb{R}_+$ ).

3. On compare les images  $g(0)$ ,  $g(x_0)$  et  $g(1)$ . On a :

$$g(0) = 1, \quad g(x_0) = 0, \quad (x_0 \text{ est solution de l'équation } g(x) = 0), \quad g(1) = \frac{1+1}{1+e} - 1 = \frac{2}{e} - 1 < 0 \quad (e > 2)$$

De façon évidente, on a :  $g(1) < g(x_0) < g(0)$  et puisque  $g$  est bijective et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , on en déduit que  $0 < x_0 < 1$ .