La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 3 pages et de cinq exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1 (Ecricome 2000)

On considère une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u).
On suppose que $\quad p \geqslant \dfrac{1}{4} \quad r \geqslant \dfrac{1}{4} \quad u \geqslant \dfrac{1}{4} \quad$ et que $\quad p + r + u = 1$.
On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement: "Tirer une boule blanche (respectivement rouge, verte) au $n^{ième}$ tirage".
On appelle X (resp Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première blanche (resp rouge).
On définit alors la variable $D = |X - Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

1. Déterminer la loi de X. Faire de même pour Y.
2. Soit i et j des entiers naturels non nuls.
   (a) Exprimer, très soigneusement, l'événement $(X = i) \cap (Y = j)$ à l'aide des événements décrits dans l'énoncé.
      i. lorsque $i < j$
      ii. lorsque $i = j$
      iii. lorsque $i > j$
   (b) En déduire la valeur de la probabilité $P((X = i) \cap (Y = j))$.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
4. Expliciter l'image-univers $D(\Omega)$
5. Exprimer l'évènement $(D = 1)$ à l'aide des évènements $(X = i)_{i \in \mathbb{N}^\times}$ et $(Y = j)_{j \in \mathbb{N}^\times}$.
   En déduire que $P(D = 1) = \dfrac{2pr}{p + r}$.
6. Soit k un entier naturel non nul, montrer l'égalité:
$$P(D = k) = \frac{pr}{p + r}\left[(1 - p)^{k-1} + (1 - r)^{k-1}\right]$$
7. Montrer que D admet une espérance et que $E(D) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r} - \dfrac{2}{p + r}$.

Exercice 2 (EDHEC 2004)

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt$ et on a, en particulier, $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t}dt$

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt$ et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt$.

   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. (a) Justifier que $\ln 2 - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t+t^n)(1+t)}dt$.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln 2 - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   (c) Donner la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 (EML Lyon 1994)

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$

1. (a) Justifier que f est C^1 sur $]0, +\infty[$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

   (b) Dresser le tableau des variations de f.

   (c) Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est horizontale.
2. (a) Montrer que l'image par f du segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est le segment $\left[0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right]$.

   (b) On définit la fonction φ : $\begin{array}{ccc} \left[0, \frac{1}{2}\right] & \to & \left[0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right] \\ x & \mapsto & 2\sqrt{x}e^{-x} \end{array}$

   Démontrer que φ réalise une bijection de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ sur $\left[0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right]$.

   (c) Dresser le tableau des variations de φ^{-1}.

   (d) Démontrer que φ^{-1} est dérivable en tout point de l'intervalle $\left]0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right[$

   (e) La fonction φ^{-1} est-elle dérivable en 0 ? En $\sqrt{\frac{2}{e}}$?

EXERCICE 4 (EM Lyon 2002)

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
  On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
  On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.
  Par exemple, s'il a fallut 3 tirages pour obtenir la boule noire, alors on pioche 3 boules au second tirage.

On admet, pour tout entier naturel k et tout réel x de $[0,1[$, que la série $\sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}x^n$ est convergente et que

$$(E)\qquad \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n=\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance.
2. Soit $k\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}^\times$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(N=n)}(X=k)$.
3. Vérifier : $P(X=0)=\dfrac{4}{9}$.
4. En utilisant l'égalité (E), montrer : $\forall k\in\mathbb{N}^\times,\quad P(X=k)=\dfrac{25}{36}(\dfrac{4}{9})^k$.
5. Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.

EXERCICE 5 (ESCP 1989 modifié)

Soient e et f les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$e(x)=\int_0^x \exp(-t^2)dt \qquad f(x)=\int_x^{2x}\exp(-t^2)\,dt$$

1. (a) Justifier que e est C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Expliciter $e'(x)$ et en déduire le sens de variations de e.
2. (a) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
   (b) Etudier la parité de f.
   (c) Donner un encadrement de f sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire la limite en $+\infty$.