

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 3 pages et de quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Durée du devoir : 4h

Bonne chance

EXERCICE 1 (Extrait modifié HEC 1986)

Partie I : Préliminaires

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \frac{e^{x+1}}{2x+1}$

1. Justifier que g est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.
2. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{e^{x+1}}{2x+1} > 1$ puis que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{1}{2x+1} > e^{-x-1}$

Données numériques : $e^{3/2} = 4.48 \pm 10^{-2}$.

3. Déterminer la nature de l'asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de g en $+\infty$.

Partie II : étude d'une suite

Pour tout entier naturel non nul n , on note f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$$

1. Etudier la variation de la fonction f_n (sur $\mathbb{R}_+$!)
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution u_n et une seule.
3. On se propose d'étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n) .
 - (a) En étudiant le signe de $f_n(n)$, montrer que $u_n > n$. En déduire la limite de la suite (u_n) .
 - (b) En utilisant la question 2 de la **partie I**, montrer que $f_n(n+1) > 0$.
En déduire la limite de $\frac{u_n}{n}$.

EXERCICE 2 (Extrait EM Lyon 1994)

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$

1. (a) Dresser le tableau des variations de f . (*on déterminera la limite en $+\infty$*)
 (b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

2. Montrer que l'image par f du segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est le segment $\left[0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right]$

3. (a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Démontrer que l'équation d'inconnue x : $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution dans le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. On notera a_n cette solution.

(b) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

(c) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ converge vers 0.

(d) Vérifier que $2n\sqrt{a_n} = \exp(a_n)$.

En déduire la limite de $n^2 a_n$ puis un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$

EXERCICE 3 (Extrait EDHEC 2001)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à 3 résultats différents R_1, R_2 et R_3 de probabilités respectives P_1, P_2 et P_3 . On a donc $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ et on admet que, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, $0 < P_i < 1$. On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.

Pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue des n épreuves et 0 sinon.

On désigne par X la variable égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1. (a) Justifier soigneusement que $X = X_1 + X_2 + X_3$.
 (b) Donner la loi de X_i , pour tout i de $\{1, 2, 3\}$.
 (c) En déduire l'espérance de X , notée $E(X)$.

La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels P_i en lesquelles $E(X)$ admet un minimum local. Pour ce faire, on note f la fonction définie sur l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$ de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (1 - x)^n + (1 - y)^n + (x + y)^n$.

2. (a) On pose $P_1 = x$ et $P_2 = y$. Vérifier que $E(X) = f(x, y)$.
 (b) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
 (c) En déduire que le seul point en lesquelles les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément est le point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
 (d) Démontrer que f présente un minimum local en ce point.
 (e) Donner la valeur de $E(X)$ correspondant à ce minimum.

EXERCICE 4 (Extrait ESSEC 1991)

Dans cet exercice, j désigne un entier naturel non nul.

Partie I

On considère les matrices : $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la matrice P est inversible et expliciter son inverse.
2. Déterminer la matrice diagonale D telle que $M = PDP^{-1}$
3. En déduire l'expression de la matrice M^{j-1} (on donnera les neuf coefficients de cette matrice)

Partie II

On considère dans cette partie un marché sur lequel 3 fournisseurs proposent des biens identiques à des consommateurs. Les commandes de ces derniers arrivent, successivement et de façon indépendantes, auprès de ces 3 fournisseurs, chacun d'eux étant choisi de façon équiprobable. On désigne :

- par X_j la variable aléatoire indiquant le nombre de fournisseurs ayant reçu au moins une commande de l'un ou plusieurs des j premiers consommateurs.
- par $P(X_j = k)$ la probabilité de l'évènement $[X_j = k]$, où $k = 1, 2$ ou 3 .
- par U_j la matrice colonne suivante : $U_j = \begin{pmatrix} P(X_j = 1) \\ P(X_j = 2) \\ P(X_j = 3) \end{pmatrix}$
- par $E(X_j)$ et $V(X_j)$ l'espérance et la variance de X_j .

1. Etude de la loi des variables aléatoires X_j

- (a) Déterminer les trois probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_j=1)}(X_{j+1} = 1), \quad P_{(X_j=2)}(X_{j+1} = 1) \quad P_{(X_j=3)}(X_{j+1} = 1)$$

puis, à l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire l'expression de $P(X_{j+1} = 1)$ en fonction des probabilités $P(X_j = 1)$, $P(X_j = 2)$, $P(X_j = 3)$.

Exprimer de même $P(X_{j+1} = 2)$ et $P(X_{j+1} = 3)$ en fonction de $P(X_j = 1)$, $P(X_j = 2)$, $P(X_j = 3)$

- (b) Etablir que $U_{j+1} = MU_j$ puis que $U_j = M^{j-1}U_1$.

- (c) Préciser U_1 , puis calculer U_j en fonction de j .

2. Calcul de l'espérance de X_j .

- (a) On considère les matrices lignes L et J définies par $L = [1, 2, 3]$ et $J = [1, 1, 1]$.

Déterminer deux réels α et β tels que (*) : $LM = \alpha L + \beta J$.

Calculer LU_i en fonction de $E(X_j)$ puis calculer JU_i .

En multipliant l'égalité (*) par U_i à droite, en déduire que : $E(X_{j+1}) = \alpha E(X_j) + \beta$.

- (b) Préciser $E(X_1)$, puis calculer $E(X_j)$ en fonction de j . Vérifier que $\lim_{j \rightarrow +\infty} E(X_j) = 3$.