La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 4 pages, de cinq exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

EXERCICE I (EML 1987)

Tous les dés considérés sont cubiques, et les apparitions des faces sont équiprobables.
On considère le dé A dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et les sept dés D_i $(1 \leqslant i \leqslant 7)$ tels que, pour chaque i, le dé D_i possède $i-1$ faces blanches et $7-i$ faces noires (par exemple, le dé D_3, contient 2 faces blanches et 4 faces noires).
On choisit tout d'abord un numéro i compris entre 1 et 7 en lançant le dé A et en procédant de la façon suivante :

- si le résultat du lancer est $2, 3, 4, 5$ ou 6, on choisit le numéro sorti,
- si le résultat du lancer est 1, on lance à nouveau le dé A, et si le nouveau résultat est $1, 2$ ou 3, on choisit le numéro 1, sinon on choisit le numéro 7.

Après avoir choisi de cette façon le numéro i $(1 \leqslant i \leqslant 7)$, on joue exclusivement avec le dé D_i. On lance D_i successivement plusieurs fois de suite : les lancers successifs sont indépendants les uns des autres.
L'observateur qui compte les faces noires ignore quel est le dé D_i utilisé.

1. On note A_k l'évènement " à l'issue de la procédure de lancer de dé, on obtient le numéro k ".
   (a) Calculer les probabilités $p(A_2)$, $p(A_3)$, $p(A_4)$, $p(A_5)$ et $p(A_6)$.
   (b) Calculer les probabilités $p(A_1)$ et $p(A_7)$
2. Calculer la probabilité pour qu'il sorte
   (a) une face noire au premier lancer.
   (b) une face noire aux deux premiers lancers.
   (c) une face noire aux trois premiers lancers.

Table de valeurs numériques

$5+4+3+2+1=15$	$5^2+4^2+3^2+2^2+1^2=55$	$5^3+4^3+3^3+2^3+1^3=225$
	$6^2=36$	$6^3=216$

3. Sachant qu'il est sorti une face noire aux deux premiers lancers, calculer la probabilité qu'il sorte une face noire au troisième lancer.

EXERCICE II (HEC 2000)

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1, et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettre a, b ou c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c.
A la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante :

- si la lettre a est tirée, on change le jeton A de case,
- si la lettre b est tirée, on change le jeton B de case,
- si la lettre c est tirée, on ne change pas le placement des jetons.

On note :

$\mathcal{A}_n$ l'évènement " le jeton A se trouve dans C_0 à l'issue de la $n^{ième}$ opération "
$\mathcal{B}_n$ l'évènement " le jeton A se trouve dans C_1 à l'issue de la $n^{ième}$ opération "

1. Pour tout entier naturel n non nul, on s'intéresse à l'évènement

J_n " à l'issue de la $n^{ième}$ opération, le jeton A n'a **jamais** quitté la case C_0 "

(a) Exprimer les évènements J_0, J_1, J_2 et J_3 en fonction des évènements $(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k)_{k\geqslant 0}$ (i.e. en fonction de $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, ...$ et des $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, ...$)

Déterminer les probabilités $p(J_0)$, $p(J_1)$, $p(J_2)$ et $p(J_3)$.

(b) Soit n un entier strictement positif quelconque. Déterminer la probabilité $p(J_n)$.

2. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on s'intéresse à l'événement

D_k " à l'issue de la $k^{ième}$ opération, le jeton A revient pour la **première fois** dans C_0 "

(a) Calculer les probabilités $p(D_1)$, $p\left(D_2\right)$, $p(D_3)$ et $p(D_4)$.

(b) Soit n un entier naturel quelconque.

Exprimer l'évènement D_n en fonction des évènements $(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k)_{k\geqslant 0}$ (i.e. en fonction de $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, ...$ et des $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, ...$)

Déterminer la probabilité $p(D_n)$.

3. (a) Justifier que $\forall n \geqslant 0,$
$$p(\mathcal{A}_{n+1}) = \frac{2}{3}p(\mathcal{A}_n) + \frac{1}{3}p(\mathcal{B}_n)$$
$$p(\mathcal{B}_{n+1}) = \frac{1}{3}p(\mathcal{A}_n) + \frac{2}{3}p(\mathcal{B}_n)$$

(b) Montrer par récurrence que :
$$\forall n \geqslant 0, \quad p(\mathcal{A}_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\times 3^n} \quad \text{et} \quad p(\mathcal{B}_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\times 3^n}$$

EXERCICE III (extrait d'ESCAE 1988, "ancêtre" d'ECRICOME)

Une étude sur le comportement des automobilistes a permis de constater que, dans les grandes villes, les contrevenants aux règles de stationnement se divisent en deux catégories :

- un sur quatre est un contrevenant involontaire (par exemple, dépassement du temps de stationnement dû à une longue file d'attente à la caisse d'un magasin)
- trois sur quatre sont des contrevenants volontaires (par exemple, stationnement gênant le temps d'effectuer un achat)

La probabilité qu'un contrevenant involontaire soit verbalisé est $\frac{1}{40}$ mais pour un contrevenant volontaire, généralement plus méfiant, elle est seulement $\frac{1}{60}$.

1. Quelle est la probabilité qu'un stationnement irrégulier soit sanctionné ?
2. Une contravention ayant été dressé pour stationnement irrégulier, quelle est la probabilité que le conducteur du véhicule soit un contrevenant volontaire ?
3. Au cours de ses activités professionnelles, un certain contrevenant volontaire se trouve 300 fois dans l'année en stationnement irréguliers et a donc, chaque fois, une probabilité de $\frac{1}{60}$ d'être verbalisé. Quelle est la probabilité qu'il soit verbalisé :
   (a) 0 fois dans l'année pour stationnement irrégulier ?
   (b) 1 fois dans l'année pour stationnement irrégulier ?
   (c) 10 fois dans l'année pour stationnement irrégulier ?
   (d) k fois dans l'année pour stationnement irrégulier ? *(k étant un entier quelconque dans $[\![0, 300]\!]$)*

EXERCICE IV (extrait EDHEC 2003)

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{\times}, \quad \dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

   (a) Montrer que f est continue en 0.

   (b) Déterminer les limite de f en $-\infty$ et $-\infty$

   (c) On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.
   En remarquant que
   $$\forall x > 0, \quad \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \ln(e^x - 1) - \ln x,$$
   déterminer la nature de la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

   (d) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - x = f(-x)$.
   En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^{\times} =]0, +\infty[$

3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   (a) Calculer $f'(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}^{\times} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

   (b) Étudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = xe^x - e^x + 1$.

   (c) En déduire le signe de $g(x)$ (on calculera $g(0)$), puis dresser le tableau de variations de f (limites comprises).

4. On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} = f(u_n) = \ln\left(\frac{e^{u_n} - 1}{u_n}\right).$$

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.

   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on utilisera à profit la question 2.d)

   (c) En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

EXERCICE V (extrait ESSEC 2003)

1. On note U l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $(0 < x < 1)$ et $(0 < y < 1)$ et $(1 - x - y > 0)$. Représenter graphiquement U. On admet que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. On considère la fonction h définie sur U par :
   $$\forall (x, y) \in U, \quad h(x, y) = \ln(x) + \ln(y) + \ln(1 - x - y)$$

   (a) Montrer que la fonction h admet exactement un point critique sur l'ouvert U.

   (b) Ce point critique est-il un extremum local ?