

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 3 pages et de 7 exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1

Soit x un réel différent de 1. Montrer que récurrence que

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

Exercice 2

Soit S_n la suite définie par $\forall n \geq 1, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. Justifier que $\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
2. En déduire que $\forall n \geq 1, \quad S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
3. La suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est-elle majorée ? Montrer qu'elle converge.

Exercice 3

On considère le fonction f définie pour tout réel x positif ou nul par $f(x) = 1 - e^{-x}$.

1. Etude de f

- (a) Dresser le tableau de variations de f .
- (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) \leq x$ puis montrer que l'égalité a lieu si et seulement si $x = 0$.

2. Etude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = 1 - e^{-u_n}$$

- (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leq 1$
- (b) Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_n$ (on pourra utiliser la question 1.b)
- (c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{3u_n + 1}, \text{ et la condition initiale } u_0 = c, \text{ où } c \text{ est un nombre réel strictement positif.}$$

On considère en outre les suites (v_n) et (w_n) définies par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + 3w_n \\ w_{n+1} = 3v_n + w_n \end{cases} \text{ et les conditions initiales : } v_0 = c, \quad w_0 = 1.$$

1. Montrer que $\forall n \geq 0, \quad u_n > 0$ puis déterminer les limites possibles de la suite u .
2. Montrer que $\forall n \geq 0, \quad u_n = \frac{v_n}{w_n}$.
3. On introduit les suites t et z définies par

$$\forall n \geq 0, \quad t_n = v_n + w_n, \quad \text{et} \quad z_n = v_n - w_n.$$

- (a) Montrer que les suites t et z sont géométriques.
 - (b) Exprimer t_n et z_n en fonction de n puis v_n et w_n en fonction de n .
4. En déduire des questions précédentes que $\forall n \geq 0, \quad u_n = \frac{(c+1) + (-\frac{1}{2})^n(c-1)}{(c+1) - (-\frac{1}{2})^n(c-1)}$
 5. Justifier la convergence de la suite $(u_n)_n$ converge et calculer sa limite.

Exercice 5

Soit a un réel tel que $\boxed{0 < a < 1}$. On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(a - u_n^2) \quad \text{et} \quad u_0 = 0$$

Le but de l'exercice est démontrer que la suite u est convergente et de déterminer sa limite.

1. Déterminer les limites possibles de la suite u .
2. Montrer que $\forall n \geq 0, \quad \sqrt{a} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - u_n)(2 - \sqrt{a} - u_n)$.
3. Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 0, \quad 0 \leq u_n \leq \sqrt{a}$
Indication : pour montrer que $u_{n+1} \leq \sqrt{a}$, on utilise l'égalité de la question 2 dont on déterminera le signe de chaque facteur
4. A l'aide des deux questions précédentes, justifier que

$$\forall n \geq 0, \quad 0 \leq \sqrt{a} - u_{n+1} \leq \left(1 - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)(\sqrt{a} - u_n)$$

5. En déduire que $\forall n \geq 0, \quad 0 \leq \sqrt{a} - u_n \leq \sqrt{a} \left(1 - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)^n$
6. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est-elle convergente ? Quelle est sa limite ?

Exercice 6

On considère une urne de taille N contenant r boules blanches et $N - r$ boules noires ($0 < r < N$). Dans cette urne on prélève toutes les boules une à une et SANS remise.

1. On suppose dans cette question que $N = 4$, $r = 1$ donc l'urne contient 4 boules dont 1 boule blanche et $4 - 1 = 3$ boules noires.

- (a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
- (b) Calculer la probabilité pour que la dernière boule blanche apparaisse au
 - i. premier prélèvement
 - ii. second prélèvement
 - iii. troisième troisième prélèvement
 - iv. quatrième prélèvement.

2. On suppose dans cette question que $N = 4$, $r = 2$ donc l'urne contient 4 boules dont 2 boules blanches et $4 - 2 = 2$ boules noires.

Calculer la probabilité pour que la dernière boule blanche apparaisse au

- (a) second prélèvement
- (b) troisième prélèvement
- (c) quatrième prélèvement.

3. Pour tout entier $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on introduit les événements

B_j : " on obtient une boule blanche au $j^{\text{ième}}$ prélèvement "

N_j : " on obtient une boule noire au $j^{\text{ième}}$ prélèvement "

A_j : " on obtient la dernière boule blanche au $j^{\text{ième}}$ prélèvement.

- (a) On suppose dans cette question que N est un entier quelconque et que $r = 1$.
 - i. Pour tout entier $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, exprimer l'événement A_k en fonction des événements $B_1, \dots, B_N, N_1, \dots, N_N$.
 - ii. Calculer la probabilité que la dernière boule blanche apparaisse au $k^{\text{ème}}$ prélèvement.
- (b) On suppose que N est un entier quelconque et que $r = 2$.
 - i. Pour tout entier $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$, exprimer l'événement A_k en fonction des événements $B_1, \dots, B_N, N_1, \dots, N_N$.
 - ii. Calculer la probabilité que la dernière boule blanche apparaisse au $k^{\text{ème}}$ prélèvement.

Exercice 7

Soient a et b deux entiers naturels. Ces deux entiers naturels sont fixés dans tout l'exercice.

On considère la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ qui vérifie :

$$(E) : \forall n \geq 0, \quad (a+b)x_{n+1} = (a+b-1)x_n + b + n$$

1. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que la suite v définie par

$$\forall n \geq 0, \quad v_n = \alpha n + \beta$$

vérifie l'égalité (E) . Exprimer alors α et β en fonction de a et b .

2. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite qui vérifie (E) et $(v_n)_{n \geq 0}$ trouvée à la question 1).

On introduit la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = x_n - v_n$.

- (a) Montrer que la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n .
- (b) En déduire l'expression de x_n en fonction de x_0 , a , b et n .
- (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$