La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 2 pages et de six exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1 (Pas plus de 10 minutes)
Déterminer parmi les assertions suivantes, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses (on ne demande pas de justifier la réponse)
Chaque bonne réponse apporte 2 unités, chaque réponse fausse -1 unité et aucune réponse 0 unité

a) $e^{a\times b}=e^a\times e^b$	*b)* $\ln(\frac{a}{b})=\ln a-\ln b$	*c)* $b\exp(a)=\exp(a^b)$	*d)* $(a-b)^2=a^2-b^2$
e) $\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$	*f)* $\ln x$ existe ssi $x\geqslant 0$	*g)* $\ln(a+b)=\ln a+\ln b$	*h)* $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$
i) $\frac{a}{b}\geqslant 0\Leftrightarrow a\geqslant 0$	*j)* $\frac{a}{b}\geqslant\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{ad-bc}{bd}\geqslant 0$	*k)* $\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x}=\frac{x+2}{x(x+1)}$	*l)* $e^a+e^b=e^{a+b}$

Exercice 2 (Equations)
Résoudre les équations suivantes

$$(E_1):\quad \frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{2x-2}{x+2},\quad (E_2):\quad \frac{e^x}{e^x-1}+\frac{e^x-1}{e^x}=\frac{2e^x+2}{e^x-2}$$

(pour l'équation (E_2), on utilisera le changement de variable $X=-e^x$ et on vérifiera soigneusement que l'on peut se ramener à l'équation (E_1))

Exercice 3 (Inéquations)
On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$(E):\quad 3x+\frac{14}{x+1}+\frac{22x}{x^2-x+1}\leqslant 2.$$

1. Ecrire l'expression $3x+\frac{14}{x+1}+\frac{22x}{x^2-x+1}-2$ sous la forme d'une unique fraction $\frac{A}{(x+1)(x^2-x+1)}$.
2. Déterminer trois réels a,b,c tels que
$$(ax^2+bx+c)(3x^2+x+1)=3x^4-2x^3+36x^2+11x+12$$
3. Résoudre alors l'inéquation (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Toujours des inéquations)

1. Montrer que $\forall x \geqslant 0, \qquad (x-1)e^x + \dfrac{x^2e^x}{2} + 1 \geqslant 0.$

2. En déduire que $\forall x \geqslant 0, \qquad e^x \leqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}e^x$

Exercice 5 (Suites usuelles)

Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3u_{n+1} + 2u_n = 1.$

1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n et de u_0.

2. Quelle valeur doit-on donner à u_0 pour que $u_2 = 1$?

Exercice 6 (Une suite non usuelle)

Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{2u_n + 1}$ avec $u_0 = 0.$

On admet que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 0.$

1. **Questions préliminaires :**

   (a) Déterminer tous les réels x tels que $x = 1 + \dfrac{2}{2x+1}$.

   (b) Soient a et b deux réels positifs tels que $b = 1 + \dfrac{2}{2a+1}$.
   Exprimer a en fonction de b.

2. **Explicitation de y_n en fonction de n :**

   On introduit la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \dfrac{u_n - \frac{3}{2}}{u_n + 1}$.

   (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \left(-\dfrac{1}{4}\right) w_n$

   (b) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n.

   (c) En déduire celle de u_n en fonction de n.