

correction de l'exercice 1

1. Les variables X et Y suivent évidemment une loi géométrique (rang de la première réalisation et les lancers sont mutuellement indépendants)

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \mathbb{N}^\times, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = P(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n) = (1-p)^{n-1}p \\ Y(\Omega) &= \mathbb{N}^\times, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y = n) = P(\overline{R_1} \cap \dots \cap \overline{R_{n-1}} \cap R_n) = (1-r)^{n-1}r \end{aligned}$$

2. (a) L'évènement $(X = i) \cap (Y = j)$ signifie que l'on obtient la première boule blanche au tirage numéro i et la première boule rouge au tirage numéro j , ce qui nous donne immédiatement

- i. lorsque $i < j$: Les $i-1$ premiers tirages ne donnent pas de boule blanche, ni de boule rouge (car la première blanche apparaît au tirage numéro i et la première boule rouge au tirage numéro $j > i$), donc ils donnent des boules vertes, le tirage numéro i donne une boule blanche, tous les tirages situés strictement entre le tirage numéro i et le numéro j ne donnent pas de boule rouge (car la première boule rouge apparaît au tirage numéro j), ces derniers tirages peuvent éventuellement donner des boules blanches (la condition $X = i$ étant déjà réalisée), donc toute couleur est possible sauf la couleur rouge, et le tirage numéro j donne une boule rouge. Il est dès lors immédiat que

$$(X = i) \cap (Y = j) = V_1 \cap \dots \cap V_{i-1} \cap B_i \cap \overline{R_{i+1}} \cap \dots \cap \overline{R_{j-1}} \cap R_j$$

- ii. lorsque $i = j$: L'évènement $(X = i) \cap (Y = j)$ est impossible car on ne peut obtenir simultanément une boule blanche et une boule rouge donc

$$(X = i) \cap (Y = j) = \emptyset$$

- iii. lorsque $i > j$: Les $j-1$ premiers tirages ne donnent pas de boule rouge, ni de boule rouge (car la première rouge apparaît au tirage numéro j et la première boule blanche au tirage numéro $i > j$), donc ils donnent des boules vertes, le tirage numéro j donne une boule rouge, tous les tirages situés strictement entre le tirage numéro j et le numéro i ne donnent pas de boule blanche (car la première boule blanche apparaît au tirage numéro i), ces derniers tirages peuvent éventuellement donner des boules rouges (la condition $Y = j$ étant déjà réalisée), donc toute couleur est possible sauf la couleur blanche, et le tirage numéro i donne une boule blanche. Il est dès lors immédiat que

$$(X = i) \cap (Y = j) = V_1 \cap \dots \cap V_{i-1} \cap R_i \cap \overline{B_{i+1}} \cap \dots \cap \overline{B_{j-1}} \cap B_j$$

- (b) Les différents lancers étant mutuellement indépendants, la question précédente nous donne

- i. lorsque $i < j$:

$$P[(X = i) \cap (Y = j)] = \underbrace{P(V_1) \cdots P(V_{i-1})}_{i-1 \text{ facteurs}} \underbrace{P(B_i) \overbrace{P(\overline{R_{i+1}}) \cdots P(\overline{R_{j-1}})}^{j \text{ facteurs}}} \underbrace{P(R_j)}_{j-(i-1)-2=j-i-1 \text{ facteurs}} = u^{i-1}p(1-r)^{j-i-1}r$$

- ii. lorsque $i = j$:

$$P[(X = i) \cap (Y = j)] = P(\emptyset) = 0$$

- iii. lorsque $i > j$:

$$P[(X = i) \cap (Y = j)] = \underbrace{P(V_1) \cdots P(V_{j-1})}_{j-1 \text{ facteurs}} \underbrace{P(R_j) \overbrace{P(\overline{B_{j+1}}) \cdots P(\overline{B_{i-1}})}^{i \text{ facteurs}}} \underbrace{P(B_i)}_{i-(j-1)-2=i-j-1 \text{ facteurs}} = u^{j-1}r(1-p)^{i-j-1}p$$

3. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car

$$P[(X = 1) \cap (Y = 1)] = 0 \quad P(X = 1)P(Y = 1) = p \times r \neq 0 \Rightarrow P[(X = 1) \cap (Y = 1)] \neq P(X = 1)P(Y = 1)$$

4. Le nombre de tirages séparant la première boule blanche de la première boule rouge est nécessairement supérieur ou égal à 1 et tous les entiers sont possibles (par exemple, si l'on obtient la première blanche au tirage numéro 1 et la première boule rouge au tirage $n+1$, alors le nombre de tirages les séparant est égal à n) donc $D(\Omega) = \mathbb{N}^\times$.

5. ($D = 1$) : Il y a 1 tirage séparant la première boule blanche de la première boule rouge donc, soit on obtient la première boule blanche au tirage numéro 1 et la première boule rouge au tirage numéro 2, ou la première boule blanche au tirage numéro 2 et la première boule rouge au tirage numéro 3, etc., soit on obtient la première boule rouge au tirage numéro 1 et la première boule blanche au tirage numéro 2, ou la

première boule rouge au tirage numéro 2 et la première boule blanche au tirage numéro 3, etc.

Nous avons donc

$$\begin{aligned}(D = 1) &= [(X = 1 \cap Y = 2) \cup (X = 2 \cap Y = 3) \cup \dots] \cup [(X = 2 \cap Y = 1) \cup (X = 3 \cap Y = 2) \cup \dots] \\ &= \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} (X = i \cap Y = i + 1) \right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} (X = i + 1 \cap Y = i) \right]\end{aligned}$$

Puisqu'il s'agit d'une union disjointe, ce qui nous donne

$$P(D = 1) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i \cap Y = i + 1) + \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i + 1 \cap Y = i)$$

La question 2.a nous donne la valeur des différentes probabilités

$$\begin{aligned}P(D = 1) &= \sum_{i=1}^{+\infty} u^{i-1} p (1-r)^{(i+1)-i-1} r + \sum_{i=1}^{+\infty} u^{i-1} r (1-p)^{(i+1)-i-1} p = \sum_{i=1}^{+\infty} u^{i-1} p r + \sum_{i=1}^{+\infty} u^{i-1} r p \\ &= 2pr \sum_{i=1}^{+\infty} u^{i-1} = 2pr (1 + u + u^2 + \dots) = 2pr \sum_{i=0}^{+\infty} u^i = \frac{2pr}{1-u} = \frac{2pr}{p+r} \quad (p + r + u = 1)\end{aligned}$$

6. Il y a k tirages séparant la première boule blanche de la première boule rouge donc, soit on obtient la première boule blanche au tirage numéro 1 et la première boule rouge au tirage numéro $k + 1$, ou la première boule blanche au tirage numéro 2 et la première boule rouge au tirage numéro $k + 2$, etc., soit on obtient la première boule rouge au tirage numéro 1 et la première boule blanche au tirage numéro $k + 1$, ou la première boule rouge au tirage numéro 2 et la première boule blanche au tirage numéro $k + 2$, etc.

Nous avons donc

$$\begin{aligned}(D = k) &= [(X = 1 \cap Y = k + 1) \cup (X = 2 \cap Y = k + 2) \cup \dots] \cup [(X = k + 1 \cap Y = 1) \cup (X = k + 2 \cap Y = 2) \cup \dots] \\ &= \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} (X = i \cap Y = k + i) \right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} (X = k + i \cap Y = i) \right]\end{aligned}$$

Puisqu'il s'agit d'une union disjointe, ce qui nous donne

$$P(D = k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i \cap Y = k + i) + \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = k + i \cap Y = i)$$

La question 2.a nous donne la valeur des différentes probabilités

$$\begin{aligned}P(D = k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} u^{i-1} p (1-r)^{(k+i)-i-1} r + \sum_{i=1}^{+\infty} u^{i-1} r (1-p)^{(k+i)-i-1} p = \sum_{i=1}^{+\infty} u^{i-1} p r (1-r)^{k-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} u^{i-1} r p (1-p)^{k-1} \\ &= pr (1-r)^{k-1} \sum_{i=1}^{+\infty} u^{i-1} + pr (1-p)^{k-1} \sum_{i=1}^{+\infty} u^{i-1} = pr [(1-r)^{k-1} + (1-p)^{k-1}] \sum_{i=1}^{+\infty} u^{i-1} \\ &= pr [(1-r)^{k-1} + (1-p)^{k-1}] (1 + u + u^2 + \dots) = pr [(1-r)^{k-1} + (1-p)^{k-1}] \sum_{i=0}^{+\infty} u^i \\ &= pr [(1-r)^{k-1} + (1-p)^{k-1}] \times \frac{1}{1-u} = \frac{pr}{p+r} [(1-r)^{k-1} + (1-p)^{k-1}] \quad (p + r + u = 1)\end{aligned}$$

7. La variable D admet une espérance si et seulement la série $\sum_{k \geq 1} kP(D = k)$ converge. L'égalité

$$\sum_{k \geq 1} kP(D = k) = \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{pr}{p+r} [(1-r)^{k-1} + (1-p)^{k-1}] \right) = \frac{pr}{p+r} \left[\sum_{k \geq 1} k(1-r)^{k-1} + \sum_{k \geq 1} k(1-p)^{k-1} \right]$$

montre que la série considérée est convergente car il s'agit d'une combinaison linéaire de deux séries convergente (car $1-r$ et $1-p$ appartiennent à $]0, 1[$ donc à $] -1, 1[$) et l'on a

$$\begin{aligned}E(D) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(D = k) = \frac{pr}{p+r} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-r)^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \right] = \frac{pr}{p+r} \left[\frac{1}{(1-(1-r))^2} + \frac{1}{(1-(1-p))^2} \right] \\ &= \frac{pr}{p+r} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{p^2} \right] = \frac{pr}{p+r} \left[\frac{r^2 + p^2}{r^2 p^2} \right] = \frac{r^2 + p^2}{pr(p+r)}\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} - \frac{2}{p+r} = \frac{r(p+r) + p(r+p) - 2pr}{pr(r+p)} = \frac{r^2 + p^2}{pr(r+p)}$$

ce qui montre que $E(D) = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - \frac{2}{p+r}$.

correction de l'exercice 2

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^n}$ est continue sur $[0, 1]$ (inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas sur $[0, 1]$) donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$ existe.

$$2. u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t} dt = [\ln|2+t|]_{t=0}^{t=1} = \ln 3 - \ln 2.$$

$$u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+2t} dt = \left[\frac{1}{2} \ln|1+2t| \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\ln 3}{2}.$$

3. (a) Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^{n+1}} dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t+t^{n+1}} - \frac{1}{1+t+t^n} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{(1+t+t^n) - (1+t+t^{n+1})}{(1+t+t^n)(1+t+t^{n+1})} dt = \int_0^1 \frac{t^n - t^{n+1}}{(1+t+t^n)(1+t+t^{n+1})} dt = \int_0^1 \frac{t^n(1-t)}{(1+t+t^n)(1+t+t^{n+1})} dt \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \frac{t^n(1-t)}{(1+t+t^n)(1+t+t^{n+1})}$ étant clairement positive sur $[0, 1]$ et l'intégration portant sur des bornes croissantes, on en déduit que l'intégrale de cette fonction est positive, ce qui nous donne la croissance de la suite u .

(b) Pour tout $t \in [0, 1]$, on a évidemment $1+t+t^n \geq 1+t > 0$. En passant à l'inverse puis en intégrant sur $[0, 1]$ la nouvelle inégalité, on obtient le résultat attendu

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$$

Pour finir, on a $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln|1+t|]_{t=0}^{t=1} = \ln 2$ donc on peut affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ln 2$

(c) La suite u étant croissante (question 3.a) et majorée par $\ln 2$ (question 3.b), le théorème de monotonie nous montre que la suite u est convergente.

4. (a) A la question 3.b, nous avons vu que $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln 2$. En utilisant cette égalité ainsi que la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} \ln 2 - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \right) dt = \int_0^1 \frac{(1+t+t^n) - (1+t)}{(1+t+t^n)(1+t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t+t^n)(1+t)} dt. \end{aligned}$$

(b) Chaque facteur du dénominateur étant plus grand que 1, le dénominateur est également plus grand que 1 et le numérateur étant positif, on en déduit la majoration suivante sur $[0, 1]$

$$\forall t \in [0, 1], \quad \frac{t^n}{(1+t+t^n)(1+t)} \leq t^n \Rightarrow \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t+t^n)(1+t)} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+1}$$

ce qui montre la majoration $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln 2 - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

(c) En combinant les questions 3.b et 4.b, on a l'encadrement suivant

$$0 \leq \ln 2 - u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement montre que la suite $\ln 2 - u_n$ converge vers 0, ce qui est équivalent à la convergence de la suite u vers $\ln 2$.

correction de l'exercice 3

1. (a) La fonction f est C^1 sur $]0, +\infty[$ comme produit de deux fonctions C^1 sur cet intervalle. Pour la dérivabilité en 0, on utilise le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{x} = \frac{2e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

Lorsque x tend vers 0^+ , le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 0 (par valeurs positives) donc le quotient vers $+\infty$ ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ et la fonction f n'est pas dérivable en 0.

(b) La dérivée de f est donné par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = 2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) e^{-x} + 2\sqrt{x} [(-x)' e^{-x}] = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} - 2\sqrt{x} e^{-x} = e^{-x} \frac{1 - 2x}{\sqrt{x}}$$

Le signe de $f'(x)$ étant celui de $1 - 2x$, le tableau de variations de f est

x	0		1/2		$+\infty$
$1 - 2x$		+	0	-	
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2/e}$	$\searrow$	0

En effet, on a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\sqrt{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} [\exp(-1)]^{1/2} = \sqrt{2} \sqrt{\exp(-1)} = \sqrt{2 \exp(-1)} = \sqrt{\frac{2}{e}} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^{1/2} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

- (c) La dérivée de f s'annulant uniquement en $x = \frac{1}{2}$, on en déduit que seul le point d'abscisse $\frac{1}{2}$ (autrement dit le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{2}{e}}\right)$) possède une tangente horizontale.

2. (a) Le tableau de variations de f établi à la question 1.b nous montre que $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right]$.

(b) La fonction φ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (comme produit de deux fonctions continues sur ce segment). En outre, sa dérivée étant strictement positive sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ (cf. question 2.b), on en déduit que φ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Par conséquent, la fonction φ réalise une bijection de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ sur $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right]$.

- (c) La fonction φ étant strictement croissante et bijective sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on en déduit que sa réciproque φ^{-1} est également strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

- (d) La fonction φ est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ (cf. question 1.a), sa dérivée φ' est strictement positive sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ (cf. question 1.b) et elle s'annule en $x = \frac{1}{2}$ donc, d'après le théorème de dérivabilité de la réciproque, la fonction φ^{-1} est dérivable sur

$$\varphi\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right) \setminus \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \left]0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right[\setminus \sqrt{\frac{2}{e}} = \left]0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right[$$

- (e) En 0 : Recherche de l'antécédent de 0 par φ .

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}e^{-x} = 0 \stackrel{2\exp(-x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \varphi^{-1}(0) = \boxed{0}$$

Or la fonction φ n'étant pas dérivable en $\boxed{0}$ donc on ne peut appliquer le théorème de dérivabilité de la réciproque, ce qui nous amène à ne pouvoir conclure à la dérivabilité de φ^{-1} en 0

Remarque : étant donné que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = +\infty$, une extension du théorème de dérivabilité de la réciproque permet de montrer que φ^{-1} est dérivable en 0 et que $(\varphi^{-1})'(0) = 0$ (" $\frac{1}{+\infty} = 0$ ")

En $\sqrt{\frac{2}{e}}$: Recherche de l'antécédent de 0 par φ . Nous avons vu à la question 1.b que $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{e}}$ donc $\frac{1}{2}$ est

un antécédent de $\sqrt{\frac{2}{e}}$. Comme cet antécédent appartient à $\left]0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right[$ et par unicité de l'antécédent appartenant à

cet intervalle, on en déduit que $\varphi^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{e}}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$.

La fonction φ est dérivable en $\boxed{\frac{1}{2}}$ et sa dérivée vaut $\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ donc la fonction φ^{-1} n'est pas dérivable en $\sqrt{\frac{2}{e}}$. Par contre, la courbe représentative de $\mathcal{C}_{\varphi^{-1}}$ présente une tangente verticale.

correction de l'exercice 4

1. La variable N suit une loi géométrique (rang de la première réalisation et les lancers sont mutuellement indépendants)

$$N(\Omega) = \mathbb{N}^{\times}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(N = n) = P(\overline{N_1} \cap \dots \cap \overline{N_{n-1}} \cap N_n) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \frac{1}{5}$$

La variable N admet une espérance car la série $\sum_{n \geq 1} nP(N = n) = \frac{1}{5} \sum_{n \geq 1} n \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ converge (puisque $\frac{4}{5}$ appartient à $] -1, 1[$) et l'on a

$$E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(N = n) = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{4}{5}\right)^2} = 5$$

2. $P_{(N=n)}(X = k)$: L'évènement $(N = n)$ est réalisé et l'on souhaite la réalisation de l'évènement $(X = k)$, c'est-à-dire qu'il a fallu n pioches pour obtenir la boule noire (donc on peut piocher n boules supplémentaires) et on souhaite obtenir k boules noires lors de ces n pioches. Etant donné que l'on ne peut obtenir strictement plus de boules noires que de pioche à la seconde série, nous devons distinguer deux cas :

- **premier cas** $k \leq n$: On est dans le cadre binomial (n répétitions d'une expérience, les répétitions étant mutuellement indépendantes et on souhaite k réalisations). On doit choisir k pioches parmi les n pioches possibles ($\binom{n}{k}$ choix), ces k pioches doivent fournir k boules noires (probabilité égale à $\left(\frac{1}{5}\right)^k$) et les $n - k$ autres fournissent $n - k$ boules blanches (probabilité égale à $\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$) donc

$$P_{(N=n)}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$$

- **second cas** $k > n$: L'évènement est impossible donc $P_{(N=n)}(X = k) = 0$.

3. L'évènement $(X = 0)$ signifie que l'on a obtenu aucune boule noire à la seconde série de pioches. Le nombre de pioches à la seconde série dépend du nombre de pioches nécessaires à la première série pour obtenir la première boule noire (1 pioche, 2 pioches, etc.), c'est-à-dire des évènements $(N = 1), (N = 2), \dots$
On introduit alors le système complet d'évènements $(N = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et la formule des probabilités totales appliquée à ce système nous donne

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(X = 0 \cap N = 1) + P(X = 0 \cap N = 2) + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 0 \cap N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n)P_{(N=n)}(X = 0) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \binom{n}{0} \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{n-0} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n-1} = \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]^n \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{5}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{16}{25}\right)^n = \frac{1}{4} \left[\frac{16}{25} + \left(\frac{16}{25}\right)^2 + \dots \right] = \frac{1}{4} \times \frac{16}{25} \left[1 + \frac{16}{25} + \dots \right] = \frac{4}{25} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{16}{25}\right)^n \\ &= \frac{4}{25} \times \frac{1}{1 - \frac{16}{25}} = \frac{4}{25} \times \frac{25}{9} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Remarquons que tous les évènements $(X = 0 \cap N = n)$ sont possibles car $0 \leq n$.

4. Bien entendu, la réalisation de l'évènement $(X = k)$ dépend des évènements $(N = 1), (N = 2), \dots$ et en utilisant la formule des probabilités totales avec ce système complet d'évènements, on a

$$P(X = k) = P(X = k \cap N = 1) + P(X = k \cap N = 2) + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = k \cap N = n)$$

Nous avons vu à la question 2 que la probabilité de l'évènement $(X = k \cap N = n)$ est impossible lorsque $k > n \Leftrightarrow n < k$ (la variable étant n puisque k est fixé). En coupant la somme précédente en deux parties ($n < k$ et $n \geq k$) et en utilisant les calculs de la question 2, on obtient

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n < k} \underbrace{P(X = k \cap N = n)}_{=0} + \sum_{n \geq k} P(X = k \cap N = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = k \cap N = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N = n)P_{(N=n)}(X = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{-k} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n} \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{5}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{5}{4}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left[\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]^n = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{16}{25}\right)^n = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \frac{\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(1 - \frac{16}{25}\right)^{k+1}} \quad (E) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \frac{\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(\frac{9}{25}\right)^{k+1}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{16}{25}\right)^k \left(\frac{25}{9}\right)^{k+1} = \frac{1}{4} \times \frac{25}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{16}{25}\right)^k \left(\frac{25}{9}\right)^k = \frac{25}{36} \left(\frac{4}{9}\right)^k \end{aligned}$$

5. La variable X admet une espérance car la série $\sum_{k \geq 0} kP(X = k) = \frac{25}{36} \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{4}{9}\right)^k$ est convergente (car $\frac{4}{9}$ appartient à $] -1, 1[$) et l'on a

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k) = \frac{25}{36} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{25}{36} \times \frac{\frac{4}{9}}{\left(1 - \frac{4}{9}\right)^2} = \frac{25}{36} \times \frac{4}{9} \times \frac{9^2}{25} = 1$$

correction de l'exercice 5

1. (a) La fonction $t \mapsto \exp(-t^2)$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$ et $0 \in] -\infty, +\infty[$ donc la fonction $e : x \mapsto \int_0^x \exp(-t^2) dt$ est définie et C^1 sur $] -\infty, +\infty[$.

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e'(x) = \exp(-x^2)$. Par conséquent, la dérivée de e est strictement positive sur $\mathbb{R}$ tout entier donc la fonction e est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. (a) **Premier cas** : Les bornes sont dans l'ordre croissant

$$x \leq 2x \Leftrightarrow 0 \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$$

La fonction $t \mapsto \exp(-t^2)$ est positive sur $[x, 2x]$ et comme $x \leq 2x$, on en déduit que l'intégrale $\int_x^{2x} \exp(-t^2) dt$ est positive donc la fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Deuxième cas : Les bornes sont dans l'ordre décroissant

$$x \geq 2x \Leftrightarrow 0 \geq x \Leftrightarrow x \leq 0$$

On utilise alors la relation de Chasles

$$f(x) = \int_x^{2x} \exp(-t^2) dt = - \int_{2x}^x \exp(-t^2) dt.$$

La fonction $t \mapsto \exp(-t^2)$ est positive sur $[2x, x]$ et comme $2x \leq x$, on en déduit que l'intégrale $\int_{2x}^x \exp(-t^2) dt$ est

positive donc l'intégrale $-\int_{2x}^x \exp(-t^2) dt = \int_x^{2x} \exp(-t^2) dt$ est négative donc la fonction f est négative sur $\mathbb{R}_-$.

- (b) Pour commencer, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. Ensuite, on effectue le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $f(x)$.

$$\begin{aligned} u &= -t \Leftrightarrow du = (-t)' dt = -dt \Leftrightarrow dt = -du, & \begin{matrix} t = 2x & u = -2x \\ t = x & u = -x \end{matrix} \\ f(-x) &= \int_{-x}^{-2x} \exp(-t^2) dt = \int_x^{2x} \exp(-(-u)^2) (-du) = - \int_x^{2x} \exp(-u^2) du = -f(x) \end{aligned}$$

donc la fonction f est impaire.

- (c) On se lance dans une majoration "à la main"

$$x \leq t \leq 2x \Rightarrow x^2 \leq t^2 \leq 4x^2 \Rightarrow -4x^2 \leq -t^2 \leq -x^2 \Rightarrow \exp(-4x^2) \leq \exp(-t^2) \leq \exp(-x^2)$$

En intégrant cette inégalité sur $[x, 2x]$ (qui est dans l'ordre croissant car $x \geq 0$), on en déduit que

$$\int_x^{2x} \exp(-4x^2) dt \leq \int_x^{2x} \exp(-t^2) dt \leq \int_x^{2x} \exp(-x^2) dt \Leftrightarrow \exp(-4x^2) \int_x^{2x} dt \leq f(x) \leq \exp(-x^2) \int_x^{2x} dt \Leftrightarrow x \exp(-4x^2) \leq f(x) \leq x \exp(-x^2)$$

Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp(-x^2)$: En effectuant le changement $u = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{u} = u^{1/2}$ (car $x \rightarrow +\infty$), on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp(-x^2) = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{1/2} e^{-u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{-u} = 0$$

Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp(-4x^2)$: En effectuant le changement $u = 4x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{u}{4}} = \frac{\sqrt{u}}{2} = \frac{u^{1/2}}{2}$ (car $x \rightarrow +\infty$), on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp(-4x^2) = \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{1/2} e^{-u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{-u} = 0$$

Par conséquent, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp(-x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp(-4x^2)$ et le théorème d'encadrement nous montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.