

correction de l'exercice 1

1. (a) Le calcul ci-dessous montre f' est positive sur $[0, 1]$ donc la fonction f est croissante sur $[0, 1]$.

$$f'(x) = \frac{e^x(x+10) - e^x}{(x+10)^2} = \frac{e^x(x+9)}{(x+10)^2}.$$

- (b) Un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(e^x(x+9))'(x+10)^2 - (e^x(x+9))2(x+10)}{(x+10)^4} = \frac{(e^x(x+9))'(x+10) - 2e^x(x+9)}{(x+10)^3} \\ &= \frac{(e^x(x+9) + e^x)(x+10) - 2e^x(x+9)}{(x+10)^3} = e^x \frac{(x+9+1)(x+10) - 2(x+9)}{(x+10)^3} \\ &= e^x \frac{x^2 + 18x + 82}{(x+10)^3} \end{aligned}$$

La fonction f'' est donc positive sur $[0, 1]$, ce qui implique que la fonction f' est croissante sur $[0, 1]$ donc

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'(0) \leq f'(x) \leq f'(1) \Leftrightarrow 0.09 = \frac{9}{100} \leq f'(x) \leq \frac{10e}{121} \leq 0.225$$

- (c) On considère la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$. Cette fonction est dérivable sur $[0, 1]$ et, d'après l'encadrement de la question 1.b), on a

$$\forall x \in [0, 1], \quad g'(x) = f'(x) - 1 < 0$$

ce qui implique que la fonction g est strictement décroissante sur $[0, 1]$. Par conséquent, la fonction g est continue (car dérivable) sur $[0, 1]$ et strictement décroissante sur $[0, 1]$ donc elle réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $g([0, 1]) = [g(1), g(0)]$. Puisque

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) = \frac{1}{10} > 0 \quad \text{et} \quad g(1) = f(1) - 1 = \frac{e}{11} - 1 \simeq -0.75 \pm 10^{-2} < 0,$$

on en déduit que $0 \in g([0, 1])$ donc l'équation $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ admet une et une seule solution sur $[0, 1]$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par g sur $[0, 1]$)

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) \geq g(1) \Leftrightarrow f(x) - x \geq f(1) - 1 = \frac{e}{11} - 1$$

- (d) La fonction g est strictement décroissante sur $[0, 1]$ donc sur $[0, \alpha]$, ce qui implique que

$$\forall x \in [0, \alpha], \quad g(x) \geq g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0$$

2. (a) Il s'agit de montrer que l'intervalle $[0, \alpha]$ est stable par f . Puisque f est croissante sur $[0, 1]$ donc sur $[0, \alpha]$, on en déduit que

$$f([0, \alpha]) = [f(0), f(\alpha)] = \left[\frac{1}{10}, \alpha \right] \subset [0, \alpha]$$

Procédons maintenant par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [0, \alpha]$.

Initialisation $n = 0$: $u_0 = 0 \in [0, \alpha]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire supposons que $u_n \in [0, \alpha]$ et montrons que $u_{n+1} \in [0, \alpha]$. Puisque $u_n \in [0, \alpha]$, $u_{n+1} = f(u_n) \in f([0, \alpha]) \subset [0, \alpha]$ donc $u_{n+1} \in [0, \alpha]$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

- (b) D'après la question 1.d) $\forall x \in [0, \alpha]$, $f(x) - x \geq 0$ et d'après la question 2.a) $u_n \in [0, \alpha]$, donc on peut poser $x = u_n$, ce qui montre que

$$f(u_n) - u_n \geq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- (c) La suite u est croissante et majorée par 1 donc elle converge. On note L la limite, cette limite appartient à $[0, 1]$. En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ (la fonction f étant continue sur $[0, 1]$), on obtient $L = f(L)$. La question 1.c) montre que cette équation n'admet que α pour solution sur $[0, 1]$ donc $L = \alpha$.
- (d) La question 1.b) montre que $\forall x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq 0.025$, ce qui permet d'appliquer l'inégalité des accroissements finis (la fonction f étant C^1 sur $[0, 1]$ comme quotient de fonctions C^1 sur $[0, 1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$) donc

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad |f(x) - f(y)| \leq 0.025 |x - y|$$

Puisque $u_n \in [0, 1]$ (question 2.a)), $\alpha \in [0, 1]$ (question 1.c)), $u_{n+1} = f(u_n)$ et que $f(\alpha) = \alpha$ (par définition de α), on en déduit que $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.025 |u_n - \alpha|$.

(e) L'inégalité précédente montre, par une récurrence donnée en fin de question, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq (0.225)^n |u_0 - \alpha| = (0.225)^n |0 - \alpha| = (0.225)^n \alpha \leq (0.225)^n$$

En suite, il suffit de choisir n tel que

$$(0.225)^n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow n \ln(0.225) \leq -3 \ln 10 \Leftrightarrow n \geq \frac{-3 \ln 10}{\ln 0.225} \simeq 4.63 \pm 10^{-2} \Leftrightarrow n \geq 5$$

donc $|u_5 - \alpha| \leq (0.225)^5 \leq 10^{-5}$.

Preuve : On pose $(\mathcal{P}_n) : |u_n - \alpha| \leq (0.225)^n |u_0 - \alpha|$

Initialisation : $(\mathcal{P}_0)$ est vraie car $(0.225)^0 |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha| \geq |u_0 - \alpha|$

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $|u_n - \alpha| \leq (0.225)^n |u_0 - \alpha|$ et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq (0.225)^{n+1} |u_0 - \alpha|$.

D'après la question 2.d), on a

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.225 |u_n - \alpha| \leq 0.225 (0.225)^n |u_0 - \alpha| = (0.225)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

correction de l'exercice 2

1. Un calcul direct nous donne

$$M(a)M(b) = \begin{pmatrix} 1-2a-2b+6ab & a+b-3ab & a+b-3ab \\ a+b-3ab & 1-2a-2b+6ab & a+b-3ab \\ a+b-3ab & a+b-3ab & 1-2a-2b+6ab \end{pmatrix} = M(a+b-3ab)$$

2. En remarquant que $M(0) = I_3$, on cherche l'inverse éventuel de $M(a)$ sous la forme $M(b)$

$$M(a)M(b) = I_3 \Leftrightarrow M(a+b-3ab) = M(0) \Leftrightarrow a+b-3ab = 0 \Leftrightarrow b(1-3a) = -a$$

Lorsque $1-3a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{3}$, en choisissant $b = -\frac{a}{1-3a} = \frac{a}{3a-1}$, on a bien $M(a)M(b) = I_3$ donc $M(a)$ est inversible et son inverse est $M\left(\frac{a}{3a-1}\right)$.

Lorsque $1-3a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$, la matrice $M(a)$ est égale à $M\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Etudions l'inversibilité de cette

matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Pivot} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

Cette dernière matrice est triangulaire supérieure et au moins un de ses coefficients diagonaux est nul donc elle n'est pas inversible, ce qui implique que la matrice $M\left(\frac{1}{3}\right)$ n'est pas inversible.

Par conséquent, $M(a)$ est inversible ssi $a \neq \frac{1}{3}$ et dans ce cas, $[M(a)]^{-1} = M\left(\frac{a}{3a-1}\right)$

3. En utilisant la question 1, on a

$$\begin{aligned} [M(a_0)]^2 &= M(a_0) \Leftrightarrow M(a_0)M(a_0) = M(a_0) \Leftrightarrow M(2a_0 - 3a_0^2) = M(a_0) \Leftrightarrow 2a_0 - 3a_0^2 = a_0 \\ &\Leftrightarrow a_0 - 3a_0^2 = 0 \Leftrightarrow a_0(1 - 3a_0) = 0 \Leftrightarrow a_0 \text{ ou } a_0 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe un unique réel a_0 non nul tel $[M(a_0)]^2 = M(a_0)$ qui est $a_0 = \frac{1}{3}$.

4. (a) Pour commencer, on a

$$P = M\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = I_3 - P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} M(a) &= P + \alpha Q \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2a = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3} \\ a = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\alpha = \frac{2}{3} - 2a \\ -\frac{1}{3}\alpha = -\frac{1}{3} + a \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1 - 3a \Leftrightarrow M(a) = P + (1 - 3a)Q \end{aligned}$$

- (b) Je laisse le lecteur vérifier que $P^2 = P$, $QP = 0_3$, $PQ = 0_3$, $Q^2 = Q$

- (c) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : [M(a)]^n = P + (1 - 3a)^n Q$.

Initialisation $n = 0$: $P + (1 - 3a)^0 Q = P + Q = I_3$ (car $Q = I_3 - P$) et $[M(a)]^0 = I_3$ donc $[M(a)]^0 = P + (1 - 3a)^0 Q$, ce qui implique la véracité de $(\mathcal{P}_0)$.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $[M(a)]^n = P + (1 - 3a)^n Q$ et montrons que $[M(a)]^{n+1} = P + (1 - 3a)^{n+1} Q$. En utilisant les questions 4.a) et 4.b) ainsi que l'hypothèse $(\mathcal{P}_n)$, on a :

$$\begin{aligned} [M(a)]^{n+1} &= M(a)[M(a)]^n = (P + (1 - 3a)Q)(P + (1 - 3a)^n Q) \\ &= P^2 + (1 - 3a)^n QP + (1 - 3a)PQ + (1 - 3a)^{n+1} Q^2 = P + (1 - 3a)^{n+1} Q \end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

correction de l'exercice 3

1. (a) Existence et unicité de x_N : La fonction f_N est un polynôme donc c'est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et sa dérivée est donnée par

$$f'_N(x) = Nx^{N-1} + (N-1)x^{N-2} + \dots + 2x + 1$$

Elle est clairement strictement positive sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc f_N est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $f_N(\mathbb{R}_+^\times) =]-a, +\infty[$. Puisque $0 \in]-a, +\infty[$, l'équation $f_N(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+^\times$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par f_N sur $\mathbb{R}_+^\times$)

$x_N \in]0, 1[$ lorsque $N > a$: On compare les images par f_N .

$$f_N(0) = -a < 0, \quad f_N(x_N) = 0 \quad (x_N \text{ solution de } f_N(x) = 0), \quad f_N(1) = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1 + 1}_{N \text{ fois}} - a = N - a > 0$$

donc $f_N(0) < f_N(x_N) < f_N(1)$ lorsque $N > a$ et, la fonction f_N étant bijective et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $0 < x_N < 1$.

- (b) Il suffit de développer l'expression donnée

$$\begin{aligned} (x-1)f_N(x) &= (x-1)(x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x - a) \\ &= x^{N+1} + x^N + \dots + x^3 + x^2 - ax - x^N - x^{N-1} - \dots - x^2 - x + a \\ &= x^{N+1} - ax - x + a = x^{N+1} - (a+1)x + a \end{aligned}$$

2. (a) On commence par montrer que $f_{N+1}(x) > f_N(x) \Leftrightarrow f_{N+1}(x) - f_N(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^\times$

$$\forall x > 0, \quad f_{N+1}(x) - f_N(x) = x^{N+1} + x^N + \dots + x^2 + x - a - x^N - x^{N-1} - \dots - x^2 - x + a = x^{N+1} > 0$$

Puisque $x_N > 0$, on en déduit que $f_{N+1}(x_N) > f_N(x_N)$. Or le réel x_N est solution de l'équation $f_N(x) = 0$ donc $f_N(x_N) = 0$ ce qui montre que $f_{N+1}(x_N) > 0$. Puisque x_{N+1} est solution de l'équation $f_{N+1}(x) = 0$, on a

$f_{N+1}(x_{N+1}) = 0$ donc $f_{N+1}(x_N) > f_{N+1}(x_{N+1})$. La fonction f_{N+1} étant strictement croissante et bijective sur $\mathbb{R}_+^*$, l'inégalité précédente implique que $x_N > x_{N+1}$, c'est-à-dire que la suite $(x_N)_N$ est strictement décroissante.

La suite $(x_N)_N$ étant décroissante et minorée par 0, elle converge. Soit x^* sa limite. On sait, d'après la question 1.a), que pour $N > a$, $x_N \in]0, 1[$ et, en fixant un entier $N_0 > a$, la monotonie de la suite $(x_N)_N$ implique que

$$\forall N \geq N_0, \quad 0 < x_N \leq x_{N_0}$$

En passant à la limite, on obtient $0 \leq x^* \leq x_{N_0} < 1$ donc $x^* \in [0, 1[$.

- (b) Par première inégalité découle de la stricte monotonie de la suite (x_N) et la seconde en résulte en élevant à la puissance N (la fonction $x \mapsto x^N$ est croissante).

Puisque $A \geq a$, la question 1.a) montre que $x_A \in [0, 1[$ donc la suite géométrique $((x_A)^N)_N$ converge vers 0, ce qui permet d'appliquer le théorème d'encadrement donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} (x_N)^N = 0$

L'égalité (*) montre que

$$f_N(x_N) = 0 \Leftrightarrow (x_N)^{N+1} - (a+1)x_N + a = 0 \Leftrightarrow x_N = \frac{a + (x_N)^{N+1}}{a+1} = \frac{a + x_N(x_N)^N}{a+1}$$

et en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $x^* = \frac{a + x^* \times 0}{a+1} = \frac{a}{a+1}$

- (c) La relation (*) et l'égalité $x_N = \frac{a}{a+1}(1 + \varepsilon_N)$ nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} f_N(x_N) &= 0 \Leftrightarrow (x_N)^{N+1} - (a+1)x_N + a = 0 \Leftrightarrow (x_N)^{N+1} = (a+1)x_N - a \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1} (1 + \varepsilon_N)^{N+1} = a(1 + \varepsilon_N) - a \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1} (1 + \varepsilon_N)^{N+1} = a\varepsilon_N \end{aligned}$$

puis en passant au logarithme, on obtient

$$(N+1) \left[\ln \left(\frac{a}{a+1} \right) + \ln(1 + \varepsilon_N) \right] = \ln a + \ln \varepsilon_N \xrightarrow{\times \varepsilon_N} (N+1) \varepsilon_N \left[\ln \left(\frac{a}{a+1} \right) + \ln(1 + \varepsilon_N) \right] = \varepsilon_N \ln(a) + \varepsilon_N \ln(\varepsilon_N)$$

Puisque $\varepsilon_N \rightarrow 0$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln(1 + \varepsilon_N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \varepsilon_N \ln(a) = 0$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \varepsilon_N \ln(\varepsilon_N) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, on peut passer à la limite dans l'égalité ci-dessus

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (N+1) \varepsilon_N \ln \left(\frac{a}{a+1} \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} (N+1) \varepsilon_N = 0$$

car $\frac{a}{a+1} \neq 1$ donc $\ln \left(\frac{a}{a+1} \right) \neq 0$.

Ensuite, puisque $\ln(1+x) \sim_{x \rightarrow 0} x$ et que $\varepsilon_N \rightarrow 0$, on a

$$(N+1) \ln(1 + \varepsilon_N) \sim_{N \rightarrow +\infty} (N+1) \varepsilon_N \Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} (N+1) \ln(1 + \varepsilon_N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (N+1) \varepsilon_N = 0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} (1 + \varepsilon_N)^{N+1} = e^0 = 1$$

En tenant compte que $\lim_{N \rightarrow +\infty} (1 + \varepsilon_N)^{N+1} = 1 \Leftrightarrow (1 + \varepsilon_N)^{N+1} \sim_{N \rightarrow +\infty} 1$ et d'après l'égalité

$$\left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1} (1 + \varepsilon_N)^{N+1} = a\varepsilon_N$$

démontrée dans cette question, nous en déduisons que Nous avons vu précédemment que

$$\varepsilon_N = \frac{1}{a} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1} (1 + \varepsilon_N)^{N+1} \sim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1} \Leftrightarrow \varepsilon_N \sim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1}$$

correction de l'exercice 4

1. On considère l'expérience $\mathcal{E}$: " lancer le dé " ainsi que l'évènement A : " obtenir un 6 ". On effectue N expériences indépendantes identiques à $\mathcal{E}$ donc Z , qui est le nombre de réalisation de l'évènement A au cours des N expériences, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, P(A)) = \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{6}\right)$ donc

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= [0, N] \quad \text{et} \quad \forall k \in [0, N], \quad P(Z = k) = \binom{N}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{N-k} = \binom{N}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k} \\ E(Z) &= N \times \frac{1}{6} = \frac{N}{6}, \quad V(Z) = N \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5N}{36} \end{aligned}$$

2. $P_{(Z=n)}(X = k)$: L'évènement $(Z = n)$ est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement $(X = k)$, c'est-à-dire que l'on a obtenu n fois la face "6", donc on lance n fois le dé, et on souhaite obtenir k "pile". Etant donné que l'on peut obtenir strictement plus de "pile" (k ici) que de faces "6" (n ici), l'évènement est impossible si $k > n$ donc $P_{(Z=n)}(X = k) = 0$ lorsque $k > n$. Si $k \leq n$, l'obtention de k "piles" en n lancers s'inscrit clairement dans le cadre binomial donc $P_{(Z=n)}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Par conséquent, on a

$$P_{(Z=n)}(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leq n \end{cases}$$

3. Bien entendu, l'évènement $n > N$ est impossible (on ne peut obtenir plus de N faces "6" car on ne lance le dé que N fois) donc $P(X = k \text{ et } Z = n) = 0$ si $n > N$. Si $n \leq N$, d'après les résultats des questions 1 et 2, on a

$$\begin{aligned} P(X = k \text{ et } Z = n) &= P(Z = n) P_{(Z=n)}(X = k) = \binom{N}{n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} P_{(Z=n)} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \binom{n}{k} \binom{N}{n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leq n \end{cases} \end{aligned}$$

4. L'évènement $(X = 0)$ correspond à l'obtention d'aucun "pile", le calcul de sa probabilité dépend évidemment du nombre de lancers de la pièce qui est possible, c'est-à-dire du nombre de faces "6" obtenues, autrement dit des évènements $(Z = 0), \dots, (Z = N)$. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(Z = 0), \dots, (Z = n)$ ainsi que la question 3, on a

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(Z = 0 \cap X = 0) + \dots + P(Z = N \cap X = 0) = \sum_{n=0}^N P(Z = n \cap X = 0) \\ &= \sum_{n=0}^N \binom{n}{0} \binom{N}{n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} p^0 (1-p)^{n-0} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} (1-p)^n \\ &= \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \left(\frac{1-p}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \stackrel{\text{binôme}}{=} \left(\frac{1-p}{6} + \frac{5}{6}\right)^N = \left(1 - \frac{p}{6}\right)^N \end{aligned}$$

5. L'égalité simplement des deux calculs suivants.

$$\begin{aligned} \binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k} &= \frac{N!}{k!(N-k)!} \times \frac{(N-k)!}{(n-k)!((N-k)-(n-k))!} = \frac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!} \\ \binom{n}{k} \binom{N}{n} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!} \end{aligned}$$

6. On effectue le changement de variable $m = n - k$ puis en utilisant la formule du binôme avec $a = \frac{1-p}{5}$ et $b = 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^N \binom{N-k}{n-k} \left(\frac{1-p}{5}\right)^n &= \sum_{m=0}^{N-k} \binom{N-k}{m} \left(\frac{1-p}{5}\right)^{m+k} = \left(\frac{1-p}{5}\right)^k \sum_{m=0}^{N-k} \binom{N-k}{m} \left(\frac{1-p}{5}\right)^m \\ &= \left(\frac{1-p}{5}\right)^k \left(\frac{1-p}{5} + 1\right)^{N-k} = \left(\frac{1-p}{5}\right)^k \left(\frac{6-p}{5}\right)^{N-k} \end{aligned}$$

7. Toujours en utilisant le système complet d'évènements $(Z = 0), \dots, (Z = N)$, la formule des probabilités totales donne

$$P(X = k) = P(Z = 0 \cap X = k) + \dots + P(Z = N \cap X = k) = \sum_{n=0}^N P(Z = n \cap X = k)$$

D'après la question 3, la probabilité $P(Z = n \cap X = k)$ est nulle si et seulement $k > n \Leftrightarrow n < k$, donc les seules probabilités non nulles sont les probabilités $P(Z = n \cap X = k)$ lorsque $n \geq k$ donc

$$P(X = k) = \sum_{n=k}^N P(Z = n \cap X = k)$$

et, toujours d'après la question 3 et d'après la question 5, on a

$$\begin{aligned}
 P(X = k) &= \sum_{n=k}^N \binom{n}{k} \binom{N}{n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{n=k}^N \binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \binom{N}{k} p^k (1-p)^{-k} \left(\frac{5}{6}\right)^N \sum_{n=k}^N \binom{N-k}{n-k} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{-n} (1-p)^n \\
 &= \binom{N}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^N \sum_{n=k}^N \binom{N-k}{n-k} \left(\frac{1}{6} \times \frac{6}{5} \times (1-p)\right)^n = \binom{N}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^N \sum_{n=k}^N \binom{N-k}{n-k} \left(\frac{1-p}{5}\right)^n \\
 &= \binom{N}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^N \left(\frac{1-p}{5}\right)^k \left(\frac{6-p}{5}\right)^{N-k} \quad (\text{question 6}) \\
 &= \binom{N}{k} \left(\frac{p}{5}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^N \left(\frac{6-p}{5}\right)^{N-k} = \binom{N}{k} \left(\frac{p}{5}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k} \left(\frac{6-p}{5}\right)^{N-k} = \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(\frac{6-p}{6}\right)^{N-k} \\
 &= \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(1 - \frac{p}{6}\right)^{N-k}
 \end{aligned}$$

D'autre part, il est évident que $X(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket$ donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(N, \frac{p}{6}\right)$, ce qui implique que

$$E(X) = N \times \frac{p}{6} = \frac{pN}{6}, \quad V(X) = N \times \frac{p}{6} \times \left(1 - \frac{p}{6}\right) = \frac{(6-p)pN}{36}$$

Puisque $Y = Z - X$, la linéarité de l'espérance, la question 1 et l'égalité ci-dessus montre que

$$E(Y) = E(Z - X) = E(Z) - E(X) = \frac{N}{6} - \frac{pN}{6} = \frac{(1-p)N}{6}$$