correction de l'exercice 1
Partie I :

1. La fonction g est le quotient de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et le dénominateur $2x+1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ donc g est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et, en utilisant que $(e^u)' = u'e^u$, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = \frac{(e^{x+1})'(2x+1) - e^{x+1}(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{e^{x+1}(2x+1) - 2e^{x+1}}{(2x+1)^2} = e^{x+1}\frac{2x-1}{(2x+1)^2}$$

2. Pour obtenir le résultat escompté, nous allons établir les variations de g sur $\mathbb{R}_+$.
Puisque $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{x+1}}{2x} = \dfrac{e}{2} \times \dfrac{e^x}{x}$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{e}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} = \dfrac{e}{2} \times \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
D'autre part, le signe de $g'(x)$ est celui de $2x-1$, donc le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^\times$ est donné par :

x	0		$1/2$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	e	$\searrow$	$[\exp(3/2)]/2$	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit immédiatement que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) \geqslant [\exp(3/2)]/2 > 1 \Leftrightarrow \frac{e^{x+1}}{2x+1} > 1 \underset{\exp(x+1)>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2x+1} > \frac{1}{e^{x+1}} = e^{-x-1}$$

3. Nous avons vu dans la question précédente que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, étudions alors l'existence de la limite $\dfrac{g(x)}{x}$ en $+\infty$.
Toujours d'après la question précédente, nous avons :
$$\frac{g(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{e}{2}\times\frac{e^x}{x}}{x} = \frac{e}{2}\times\frac{e^x}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \frac{e}{2}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = \frac{e}{2}\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$
donc la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique en $+\infty$.

Partie II :

1. La fonction f_n est clairement C^1 sur $\mathbb{R}_+$ (quotient de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}_+$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$) et sa dérivée est donnée par
$$f_n'(x) = \frac{(x-n)'(x+n) - (x-n)(x+n)'}{(x+n)^2} - (-x)'e^{-x} = \frac{(x+n)-(x-n)}{(x+n)^2} - (-1)e^{-x} = \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x}$$
Cette dérivée est clairement strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ (addition de deux termes strictement positifs) donc la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ (puisqu'elle y est C^1, d'après la question 1) et elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (d'après la question 1) donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f_n(\mathbb{R}_+) = [-2, 1[$.
Justification du fait que $f_n(\mathbb{R}_+) = [-2,1[$: *La fonction f_n étant strictement croissante, il est clair que $f_n(\mathbb{R}_+) = [f_n(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)[$ et un calcul immédiat montre que $f_n(0) = -2$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-n}{x+n} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1 - 0 = 1$*
Puisque $0 \in [-2, 1[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet bien une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par f_n).

3. (a) Un calcul direct nous montre que $f_n(n) = -e^{-n} < 0$ et comme $f_n(u_n) = 0$ (u_n est solution de l'équation $f_n(x) = 0$), on en déduit que $f_n(n) < f_n(u_n)$. La fonction f_n étant strictement croissante et bijective sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $n < u_n$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, l'inégalité précédente montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

   (b) Un calcul direct nous donne $f_n(n+1) = \dfrac{1}{2n+1} - e^{-n-1}$ et en utilisant la question 2, on en déduit que $f_n(n+1) > 0$ et comme $f_n(u_n) = 0$, on en déduit que $f_n(n+1) > f_n(u_n)$. La bijectivité et la stricte croissance de f_n sur $\mathbb{R}_+$ implique alors que $n+1 > u_n$.

Cette inégalité combinée à l'inégalité que la question 3.a), nous donne $n < u_n < n+1$. En divisant de part et d'autre de cette inégalité par n, on en déduit que $1 < \frac{u_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$ et, puisque $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, le théorème d'encadrement s'applique et il montre que $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n} = 1$.

correction de l'exercice 2

1. (a) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (comme produit de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$) et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = 2(\sqrt{x})'e^{-x} + 2\sqrt{x}(-x)'e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x} - 2\sqrt{x}e^{-x} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}(1-2x).$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-2x$ et étant donné que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, le tableau de variation de f est donné par

x	0		$1/2$		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}\exp(-1/2)$	$\searrow$	$+\infty$ 0

(b) On introduit le taux d'accroissement de f en 0

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{x} = \frac{2e^{-x}}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x}} \to +\infty$$

donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$, ce qui implique que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

2. D'après la question 1.a), on a $f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = \left[0, \sqrt{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ et comme

$$\sqrt{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\exp(-1)^{1/2} = \sqrt{2}\sqrt{\exp(-1)} = \sqrt{2}\times\sqrt{\frac{1}{e}} = \sqrt{\frac{2}{e}},$$

on a bien $f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = \left[0,\sqrt{\frac{2}{e}}\right]$.

3. (a) La fonction f est continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, C^1 sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ et $\forall x \in \left]0,\frac{1}{2}\right]$, $f'(x) > 0$, on en déduit que f est strictement monotone sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. En outre, elle est continue sur cet intervalle donc elle réalise une bijection de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ sur $f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = \left[0,\sqrt{\frac{2}{e}}\right]$.

Ensuite, pour $n \geqslant 2$, on a $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2} < 1 \leqslant \sqrt{\frac{2}{e}}$ (il est de notoriété publique que $e > 2$!!) donc $\frac{1}{n} \in \left[0,\sqrt{\frac{2}{e}}\right]$

Par conséquent, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une et une seule solution sur le segment $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ (existence et unicité de l'antécédent de $\frac{1}{n}$ par f sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$).

(b) On compare les images par f de a_n et a_{n+1}. On a $f(a_n) = \frac{1}{n}$ (puisque a_n est solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$) et $f(a_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ (puisque a_{n+1} est solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{n+1}$) donc $f(a_{n+1}) \leqslant f(a_n)$. La fonction f étant strictement croissante et bijective sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on en déduit que $a_{n+1} \leqslant a_n$, ce qui montre la décroissance de la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$.

(c) Notons L la limite de la suite a_n. Puisque a_n vérifie l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$, on a $2\sqrt{a_n}e^{-a_n} = \frac{1}{n}$ et en passant à la limite, on a : $2\sqrt{L}e^{-L} = 0 \underset{e^{-L}\neq 0}{\Leftrightarrow} L = 0$ donc la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0.

(d) En utilisant la question précédente, on a

$$2\sqrt{a_n}e^{-a_n} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow 2n\sqrt{a_n} = \frac{1}{e^{-a_n}} \Leftrightarrow 2n\sqrt{a_n} = e^{a_n} \Leftrightarrow 4n^2 a_n = e^{2a_n}$$

(en élevant au carré cette égalité). En passant à la limite dans cette égalité, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} 4n^2 a_n = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} n^2 a_n = \frac{1}{4} \Leftrightarrow n^2 a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$$

correction de l'exercice 3

1. (a) Chaque variable X_i est une variable de Bernouilli et l'évènement $(X_i = 1)$ correspond au fait que le numéro i n'est pas obtenu durant les n épreuves donc $X_1 + X_2 + X_3$ est le nombre de numéros qui n'ont pas été obtenus durant les n épreuves donc $X = X_1 + X_2 + X_3$.

(b) Loi de X_i : Par construction, $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$. Ensuite, l'évènement $(X_i = 1)$ correspondant à n non réalisations successives de l'évènement $\overline{R_i}$ et les épreuves étant indépendantes, on a

$$\begin{aligned} P(X_i = 1) &= P(\underbrace{\overline{R_i} \cap \cdots \cap \overline{R_i}}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{P(\overline{R_i}) \cdots P(\overline{R_i})}_{n \text{ fois}} = (1 - P_i)^n \\ P(X_i = 0) &= 1 - P(X_i = 0) = 1 - (1 - P_i)^n \end{aligned}$$

(c) Chaque variable X_i étant de Bernoulli, il est immédiat que $E(X_i) = (1 - P_i)^n$ et par linéarité de l'espérance, on obtient

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = (1 - P_1)^n + (1 - P_2)^n + (1 - P_3)^n$$

2. (a) Puisque $P_1 + P_2 = 1 - P_3$, on a

$$E(X) = (1 - P_1)^n + (1 - P_2)^n + (P_1 + P_2)^n = (1 - x)^n + (1 - y)^n + (x + y)^n = f(x, y)$$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -n(1 - x)^{n-1} + n(x + y)^{n-1}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -n(1 - y)^{n-1} + n(x + y)^{n-1}$

(c) On résout directement le système, en tenant compte que $a^{n-1} = b^{n-1} \Leftrightarrow a = b$ lorsque a et b sont positifs (ce qui est cas pour x et y), on a

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -n(1 - x)^{n-1} + n(x + y)^{n-1} = 0 \\ -n(1 - y)^{n-1} + n(x + y)^{n-1} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -(1 - x)^{n-1} + (x + y)^{n-1} = 0 \\ -(1 - y)^{n-1} + (x + y)^{n-1} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1 - x)^{n-1} = (x + y)^{n-1} \\ (1 - y)^{n-1} = (x + y)^{n-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 - x = x + y \\ 1 - y = x + y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l|l} 3x = 1 & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ 3y = 1 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

(d) Le point $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ étant un point critique de f (il annule les deux dérivées partielles d'ordre 1), et $]0, 1[\times]0, 1[$ étant un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on doit déterminer les dérivées partielles du second ordre au point $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = n(n-1)(1 - x)^{n-2} + n(n-1)(x + y)^{n-2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = n(n-1)(x + y)^{n-2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = n(n-1)(1 - y)^{n-2} + n(n-1)(x + y)^{n-2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = 2n(n-1)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} \\ s\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = n(n-1)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} \\ t\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = 2n(n-1)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} \end{array}\right.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}(rt-s^2)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) &= \left[2n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right]^2-\left[n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right]^2=4n^2(n-1)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-4}-n^2(n-1)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-4}\\ &= 3n^2(n-1)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-4}>0\end{aligned}$$

ce qui implique que le point $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ est un extrémum local de f sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$

Ensuite, $r+t=4n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}>0$ donc le point $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ est un minimum local de f sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$.

(e) En ce minimum, on a $E(X)=f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n=3\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

correction de l'exercice 4
Partie I

1. On procède par les opérations élémentaires sur les matrices

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\ \begin{matrix}\textit{Pivot}\\L_2\leftarrow L_2+2L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\ \begin{matrix}\textit{Pivot}\\L_3\leftarrow L_3+L_2\end{matrix}\quad\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\ L_2\leftarrow -L_2$$

donc la matrice P est inversible et son inverse est .... P !!

Vérification $\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

2. $M=PDP^{-1}\Leftrightarrow P^{-1}MP=D\Leftrightarrow D=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{2}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

3. Une récurrence évidente montre que $\forall j\in\mathbb{N}^\times,\quad M^{j-1}=PD^{j-1}P^{-1}$ donc

$$D^{j-1}=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}&0&0\\0&\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad PD^{j-1}=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}&0&0\\-2\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}&-\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}&0\\\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}&\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}&1\end{pmatrix}$$

$$M^{j-1}=PD^{j-1}P^{-1}=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}&0&0\\-2\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}+2\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}&\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}&0\\\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}-2\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}+1&-\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}+1&1\end{pmatrix}$$

Partie II

1. (a) Commençons par calculer les neuf probabilités conditionnelles demandées.

$$\begin{aligned}
P_{(X_j=1)}(X_{j+1}=1) &= \frac{1}{3}, \quad P_{(X_j=2)}(X_{j+1}=1)=0, \quad P_{(X_j=3)}(X_{j+1}=1)=0 \\
P_{(X_j=1)}(X_{j+1}=2) &= \frac{2}{3}, \quad P_{(X_j=2)}(X_{j+1}=3)=\frac{2}{3}, \quad P_{(X_j=3)}(X_{j+1}=1)=0 \\
P_{(X_j=1)}(X_{j+1}=3) &= 0, \quad P_{(X_j=2)}(X_{j+1}=3)=\frac{1}{3}, \quad P_{(X_j=3)}(X_{j+1}=1)=1
\end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités :

$\underline{P_{(X_j=1)}(X_{j+1}=1)}$: *L'évènement* $(X_j=1)$ *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_{j+1}=1)$, *c'est-à-dire qu'un fournisseur a reçu au moins un commande par l'un ou plusieurs des* j *premiers consommateurs et on souhaite qu'un fournisseur recoive au moins un commande par l'un ou plusieurs des* $j+1$ *premiers consommateurs. Autrement dit, on souhaite le* $(j+1)$*-ième consommateur effectue une commande auprès du fournisseur choisi par les* j *premiers consommateurs. Il a 1 chance sur trois pour le choisir donc* $P_{(X_j=1)}(X_{j+1}=1)=\frac{1}{3}$.

$\underline{P_{(X_j=2)}(X_{j+1}=1)}$: *L'évènement* $(X_j=2)$ *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_{j+1}=1)$, *c'est-à-dire que deux fournisseurs ont reçu au moins un commande par l'un ou plusieurs des* j *premiers consommateurs et on souhaite qu'un fournisseur recoive au moins un commande par l'un ou plusieurs des* $j+1$ *premiers consommateurs. Ceci est clairement impossible (au moins deux fournisseurs seront choisis par les* j *premiers consommateurs donc par les* $j+1$ *premiers consommateurs) donc* $P_{(X_j=2)}(X_{j+1}=1)=0$.

$\underline{P_{(X_j=3)}(X_{j+1}=1)}$: *L'évènement* $(X_j=3)$ *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_{j+1}=1)$, *c'est-à-dire que trois fournisseurs ont reçu au moins un commande par l'un ou plusieurs des* j *premiers consommateurs et on souhaite qu'un fournisseur recoive au moins un commande par l'un ou plusieurs des* $j+1$ *premiers consommateurs. Ceci est clairement impossible (au moins trois fournisseurs seront choisis par les* j *premiers consommateurs donc par les* $j+1$ *premiers consommateurs) donc* $P_{(X_j=3)}(X_{j+1}=1)=0$.

$\underline{P_{(X_j=1)}(X_{j+1}=2)}$: *L'évènement* $(X_j=2)$ *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_{j+1}=1)$, *c'est-à-dire qu'un fournisseur a reçu au moins un commande par l'un ou plusieurs des* j *premiers consommateurs et on souhaite que deux fournisseurs recoivent au moins un commande par l'un ou plusieurs des* $j+1$ *premiers consommateurs. Autrement dit, on souhaite le* $(j+1)$*-ième consommateur effectue une commande auprès d'un des deux fournisseurs non choisis par les* j *premiers consommateurs. Il a 1 chance sur trois pour choisir chacun de ces fournisseurs donc* $P_{(X_j=1)}(X_{j+1}=2)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

$\underline{P_{(X_j=2)}(X_{j+1}=2)}$: *L'évènement* $(X_j=2)$ *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_{j+1}=2)$, *c'est-à-dire que deux fournisseurs ont reçu au moins un commande par l'un ou plusieurs des* j *premiers consommateurs et on souhaite que deux fournisseurs recoivent au moins un commande par l'un ou plusieurs des* $j+1$ *premiers consommateurs. Autrement dit, on souhaite le* $(j+1)$*-ième consommateur effectue une commande auprès de l'un des deux fournisseurs choisis par les* j *premiers consommateurs. Il a 1 chance sur trois pour choisir chacun de ces fournisseurs donc* $P_{(X_j=2)}(X_{j+1}=2)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

$\underline{P_{(X_j=3)}(X_{j+1}=2)}$: *L'évènement* $(X_j=3)$ *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_{j+1}=2)$, *c'est-à-dire que trois fournisseurs ont reçu au moins un commande par l'un ou plusieurs des* j *premiers consommateurs et on souhaite que deux fournisseurs recoivent au moins un commande par l'un ou plusieurs des* $j+1$ *premiers consommateurs. Ceci est clairement impossible (au moins trois fournisseurs seront choisis par les* j *premiers consommateurs donc par les* $j+1$ *premiers consommateurs) donc* $P_{(X_j=3)}(X_{j+1}=2)=0$.

$\underline{P_{(X_j=1)}(X_{j+1}=3)}$: *L'évènement* $(X_j=1)$ *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_{j+1}=3)$, *c'est-à-dire qu'un fournisseur a reçu au moins un commande par l'un ou plusieurs des* j *premiers consommateurs et on souhaite que trois fournisseurs recoivent au moins un commande par l'un ou plusieurs des* $j+1$ *premiers consommateurs. Autrement dit, on souhaite le* $(j+1)$*-ième consommateur effectue une commande auprès des deux fournisseurs non choisis par les* j *premiers consommateurs, ce qui est impossible d'après l'énoncé (chaque consommateur n'achetant qu'à un seul fournisseur) donc* $P_{(X_j=1)}(X_{j+1}=3)=0$.

$\underline{P_{(X_j=2)}(X_{j+1}=3)}$: *L'évènement* $(X_j=2)$ *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_{j+1}=3)$, *c'est-à-dire que deux fournisseurs ont reçu au moins un commande par l'un ou plusieurs des* j *premiers consommateurs et on souhaite que deux fournisseurs recoivent au moins un commande par l'un ou plusieurs des* $j+1$ *premiers consommateurs. Autrement dit, on souhaite le* $(j+1)$*-ième consommateur effectue une commande auprès du fournisseur non choisi par les* j *premiers consommateurs. Il a 1 chance sur trois pour le choisir donc* $P_{(X_j=2)}(X_{j+1}=3)=\frac{1}{3}$.

$\underline{P_{(X_j=3)}(X_{j+1}=3)}$: *L'évènement* $(X_j=3)$ *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_{j+1}=3)$, *c'est-à-dire que trois fournisseurs ont reçu au moins un commande par l'un ou plusieurs des* j *premiers consommateurs et on souhaite que trois fournisseurs recoivent au moins un commande par l'un ou plusieurs des* $j+1$ *premiers consommateurs, ce qui correspond à l'évènement certain (les trois fournisseurs seront choisis par les* j

premiers consommateurs donc par les $j+1$ premiers consommateurs) donc $P_{(X_j=3)}(X_{j+1}=3)=1$.

Expression de $P(X_{j+1}=k)$ en fonction des $P(X_j=q)$:
Le nombre de fournisseurs choisis par les $j+1$ premiers clients dépendant du nombre de fournisseurs choisis par les j premiers clients, c'est-à-dire que les évènements $(X_{j+1}=k)$ dépendant des évènements $(X_j=1)$, $(X_j=2)$, $(X_j=3)$, on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(X_j=1)$, $(X_j=2)$, $(X_j=3)$. En utilisant également les calculs de probabilités conditionnelles précédents, on a :

$$\begin{aligned}
P\left(X_{j+1}=1\right) &= P(X_j=1\cap X_{j+1}=1)+P(X_j=2\cap X_{j+1}=1)+P(X_j=3\cap X_{j+1}=1)\\
&= P(X_j=1)P_{(X_j=1)}(X_{j+1}=1)+P(X_j=2)P_{(X_j=2)}(X_{j+1}=1)+P(X_j=3)P_{(X_j=3)}(X_{j+1}=1)\\
&= \frac{1}{3}P(X_j=1)\\
P\left(X_{j+1}=2\right) &= P(X_j=1\cap X_{j+1}=2)+P(X_j=2\cap X_{j+1}=2)+P(X_j=3\cap X_{j+1}=2)\\
&= P(X_j=1)P_{(X_j=1)}(X_{j+1}=2)+P(X_j=2)P_{(X_j=2)}(X_{j+1}=2)+P(X_j=3)P_{(X_j=3)}(X_{j+1}=2)\\
&= \frac{2}{3}P(X_j=1)+\frac{1}{3}P(X_j=2)\\
P\left(X_{j+1}=3\right) &= P(X_j=1\cap X_{j+1}=3)+P(X_j=2\cap X_{j+1}=3)+P(X_j=3\cap X_{j+1}=3)\\
&= P(X_j=1)P_{(X_j=1)}(X_{j+1}=3)+P(X_j=2)P_{(X_j=2)}(X_{j+1}=3)+P(X_j=3)P_{(X_j=3)}(X_{j+1}=3)\\
&= \frac{1}{3}P(X_j=2)+P(X_j=3)
\end{aligned}$$

ce que l'on peut résumer par

$$\begin{cases}
P\left(X_{j+1}=1\right)=\dfrac{1}{3}P(X_j=1)\\
P\left(X_{j+1}=2\right)=\dfrac{2}{3}P(X_j=1)+\dfrac{1}{3}P(X_j=2)\\
P\left(X_{j+1}=3\right)=\dfrac{1}{3}P(X_j=2)+P(X_j=3)
\end{cases}$$

(b) La première égalité n'est rien d'autre que la transcription matricielle du système ci-dessus.
Pour la seconde, on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_j) : U_j = M^{j-1}U_1$.
Initialisation $j=1$: $M^{1-1}U_1 = IU_1 = U_1$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
Hérédité : supposons que $(\mathcal{P}_j)$ soit vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{j+1})$ est vraie, c'est-à-dire que $U_j = M^{j-1}U_1$ soit vraie et montrons que $U_{j+1} = M^jU_1$. On a $U_j = M^{j-1}U_1$ et $U_{j+1} = MU_j$ donc $U_{j+1} = MM^{j-1}U_1 = M^jU_1$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{j+1})$ et achève la preuve.

(c) Le premier consommateur choisi de façon équiprobable chaque fournisseur donc

$$P(X_1=1)=P(X_2=1)=P(X_3=1)=\frac{1}{3}\Rightarrow U_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

et la question 3 de la **partie I** nous donne $U_j = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{j-1}\\ -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{j-1}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{j-1}\\ 1+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{j-1}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{j-1}\end{pmatrix}$

2. (a) Un calcul direct donne $LM = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & 3 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} LM &= \alpha L + \beta J \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 2\alpha+\beta & 3\alpha+\beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = \frac{5}{3} \\ 2\alpha+\beta = \frac{7}{3} \\ 3\alpha+\beta = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = \frac{5}{3} \\ -\beta = -1 \\ -2\beta = -2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \textit{Pivot} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow LM = \frac{2}{3}L + J \end{aligned}$$

Ensuite, toujours par calcul direct, on a

$$\begin{aligned} LU_i &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_j=1) \\ P(X_j=2) \\ P(X_j=3) \end{pmatrix} = P(X_j=1) + 2P(X_j=2) + 3P(X_j=3) = E(X_j) \\ JU_i &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_j=1) \\ P(X_j=2) \\ P(X_j=3) \end{pmatrix} = P(X_j=1) + P(X_j=2) + P(X_j=3) = 1 \\ LM &= \frac{2}{3}L + J \Rightarrow LMU_j = \frac{2}{3}LU_j + JU_j \Leftrightarrow LU_j = \frac{2}{3}E(X_j) + 1 \Leftrightarrow E(X_{j+1}) = \frac{2}{3}E(X_j) + 1 \end{aligned}$$

(b) A la question 1.c) de la **partie II**, nous avons déterminer la loi de X_1 donc

$$E(X_1) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = 2.$$

La suite $(E(X_j))_{j \in \mathbb{N}^\times}$ est arithmético-géométrique et la constante L associée vérifie

$$L = \frac{2}{3}L + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}L = 1 \Leftrightarrow L = 3$$

La suite u définie par $u_j = E(X_j) - 3$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ car

$$u_{j+1} = E(X_{j+1}) - 3 = \frac{2}{3}E(X_j) + 1 - 3 = \frac{2}{3}E(X_j) - 2 = \frac{2}{3}(u_j + 3) - 2 = \frac{2}{3}u_j$$

On en déduit que

$$u_j = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} u_1 \Leftrightarrow E(X_j) - 3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} (E(X_1) - 3) \Leftrightarrow E(X_j) = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}$$

et, puisque $\frac{2}{3} \in]-1, 1[$, la suite $\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}$ tend vers 0, ce qui implique que $\lim\limits_{j \to +\infty} E(X_j) = 3$.