

EXERCICE I (EML 1996)

1. (a) La fonction f est le quotient de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{e^x(e^{2x} + 1) - e^x(2e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^x(1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ étant visiblement celui de $1 - e^{2x}$ et comme

$$1 - e^{2x} < 0 \Leftrightarrow 1 < e^{2x} \Leftrightarrow \ln 1 < 2x \Leftrightarrow 0 < x,$$

on obtient le tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$1 - e^{2x}$		+		-	
$f'(x)$		+		-	
$f(x)$			$\frac{1}{2}$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Limite en $-\infty$: puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$, il est immédiat que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Limite en $+\infty$: puisque $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

- (b) On introduit la fonction $g(x) = f(x) - x$ (on ne peut appliquer le théorème de bijection à f car nous n'avons pas une équation du type $f(x) = a$, a étant une constante indépendante de x).

La fonction g est C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= f'(x) - 1 = \frac{e^x(1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2} - 1 = \frac{e^x - e^{3x} - (e^{2x} + 1)^2}{(e^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{e^x - e^{3x} - e^{4x} - 2e^{2x} - 1}{(e^{2x} + 1)^2} \end{aligned}$$

Il s'agit d'étudier le signe de $e^x - e^{3x} - e^{4x} - 2e^{2x} - 1$. On étudie alors la fonction intermédiaire

$$h(X) = X - X^2 - X^4 - 2X^2 - 1,$$

qui s'obtient par " changement de variable " $X = e^x$, lorsque $X > 0$ (puisque $e^x > 0$) On a :

$$h'(X) = -4X^3 - 6X - 1 \quad \text{et} \quad h''(X) = -12X^2 - 6$$

On en déduit le tableau de variation de h'

X	0		$+\infty$
$h''(X)$		-	
$h'(X)$	-1	$\searrow$	$-\infty$
$h'(X)$		-	
$h(X)$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Par conséquent, la fonction h est toujours strictement négative sur $]0, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto e^x - e^{3x} - e^{4x} - 2e^{2x} - 1$ est strictement négative sur $\mathbb{R}$, ce qui implique que $g' < 0$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, la fonction g est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = +\infty$$

En particulier, étant donné que $0 \in \mathbb{R} (= g(\mathbb{R}))$, l'équation $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$.

- (c) Il suffit de comparer les images (par g puisque ℓ est solution de l'équation $g(x) = 0$). On a

$$g(0) = f(0) - 0 = \frac{1}{2}, \quad g(\ell) = 0$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{e^{1/2}}{e + 1} - \frac{1}{2} \simeq \frac{1.65}{3.72} - \frac{1}{2} = \frac{3.30 - 3.72}{2 \times 3.72} < 0,$$

ce qui nous permet d'écrire $g\left(\frac{1}{2}\right) \leq g(\ell) < g(0)$ et la fonction g étant strictement décroissante et bijective, on a donc l'encadrement souhaité: $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

- (d) Nous savons, d'après la question 1.a, que $\forall x \geq 0$, $f'(x) \leq 0$ donc $|f'(x)| = -f'(x) = \frac{e^x(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$. On remarque alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f'(x)| = \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \times \frac{(e^{2x} - 1)}{e^{2x} + 1} \leq \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \times \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} + 1} \leq \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = f(x)$$

Ensuite, toujours d'après la question 1.a), on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq \frac{1}{2}$. La combinaison de l'inégalité $0 \leq |f'(x)| \leq f(x)$ et $f(x) \leq \frac{1}{2}$ nous montre que : $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

(e) Nous avons

x	0		$1/2$
$f(x)$	$1/2$	$\searrow$	$f(1/2)$

, ce qui nous permet d'écrire

$$f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ puisque } f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq \frac{1.65}{3.72} \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

2. (a) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [0, \frac{1}{2}]$

Initialisation : $u_0 = 0 \in [0, \frac{1}{2}]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ donc $f(u_n) \in [0, \frac{1}{2}]$ (par stabilité de $[0, \frac{1}{2}]$ par f , d'après la question 1.e)) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, \frac{1}{2}]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(b) La question 1.d) combinée au fait que f est C^1 sur $[0, \frac{1}{2}]$ permet d'utiliser l'inégalité des accroissements donc on a :

$$\forall x, y \in [0, \frac{1}{2}], |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|.$$

En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $[0, \frac{1}{2}]$) et $y = \ell$ (qui appartient aussi à $[0, \frac{1}{2}]$) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|.$$

Pour l'inégalité suivante, posons $(\mathcal{H}_n) : |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Initialisation : $|u_0 - \ell| = |0 - \ell| = \ell \leq \frac{1}{2}$. Ensuite $\frac{1}{2^{0+1}} = \frac{1}{2}$, on en déduit que $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie. Nous avons donc $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

et nous avons montré dans cette question que $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$ donc

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(c) Puisqu'une valeur absolue est toujours positive, on a : $0 \leq |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ et la suite $(\frac{1}{2^{n+1}})_n$ tendant vers 0, le théorème d'encadrement montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0$, c'est-à-dire $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ (la distance entre u_n et ℓ tend vers 0)

EXERCICE II (ESCP 1990)

1. (a) La fonction $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$ est C^1 sur $[0, +\infty[$ (comme quotient de deux fonctions C^1 sur $[0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$) et $t \mapsto \ln(1+t)$ est C^1 sur $[0, +\infty[$ (car $1+t$ est C^1 et strictement positif sur $[0, +\infty[$) donc la fonction f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Sa dérivée est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f'(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{(2t)(1+t^2) - t^2(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t} + \frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

donc $f' > 0$ sur $[0, +\infty[$ et son tableau de variation est donné par :

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		+	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La limite en $+\infty$ s'obtient simplement en remarquant que $\frac{t^2}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^2} = 1$

donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{t^2+1} = 1$

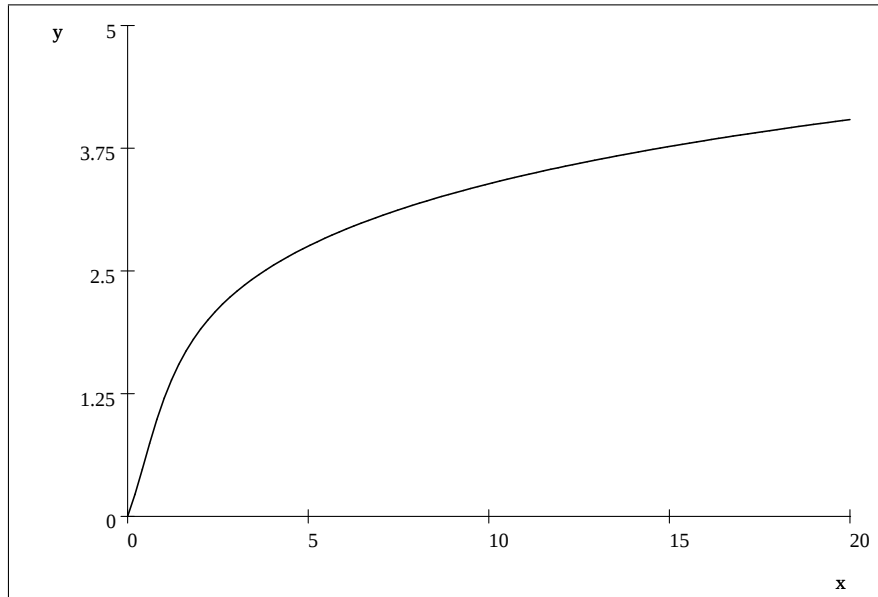
(b) Puisque $\frac{t^2}{t^2+1} \rightarrow 1$, on en déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2+1}{t} = 0$ donc il reste à évaluer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+t)}{t}$. Inutile de tenter un DL de $\ln(1+t)$ puisque $t \rightarrow +\infty$!! Pour

lever l'indétermination, on factorise par le terme dominant dans le logarithme

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{\ln[t(1+\frac{1}{t})]}{t} = \frac{\ln t + \ln(1+\frac{1}{t})}{t} = \frac{\ln t}{t} + \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{t}$$

On peut donc conclure puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{t} = 0$ (le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers $+\infty$), ce qui implique que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$.

Autrement dit, en $+\infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique ($\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$)



2. (a) A la question 1.a, il a été montré que f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que l'équation $f(t) = \frac{1}{n}$ admet une et une solution (existence et unicité de l'antécédent de $\frac{1}{n}$ par f).

- (b) On doit comparer α_n et α_{n+1} donc on compare leurs images : $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$

(α_n est solution de $f(t) = \frac{1}{n}$) et $f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ donc $f(\alpha_{n+1}) \leq f(\alpha_n)$. La fonction f étant strictement croissante et bijective sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$, c'est-à-dire que la suite α est décroissante.

La suite α est décroissante et minorée par 0 ($\alpha_n \in [0, +\infty[$) donc elle converge. On note L sa limite. On a pour tout entier

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \ln(1 + \alpha_n) + \frac{(\alpha_n)^2}{(\alpha_n)^2 + 1} = \frac{1}{n}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\ln(1 + L) + \frac{L^2}{L^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow f(L) = 0.$$

Or nous avons montré à la question 1.a) (tableau de variation de f) que la fonction f est strictement croissante et qu'elle ne s'annule qu'en 0. Par conséquent, $L = 0$ et la suite α converge vers 0.

- (c) Lorsque $t \rightarrow 0^+$, on a : $\frac{f(t)}{t} = \underbrace{\frac{\ln(1+t)}{t}}_{\rightarrow 1} + \underbrace{\frac{t}{1+t^2}}_{\rightarrow 0}$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = 1$.

Puisque $\alpha_n \rightarrow 0$, on peut affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(\alpha_n)}{\alpha_n} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = 1$. Ensuite, puisque $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$, on peut encore écrire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\alpha_n} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\alpha_n} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha_n = 1$$

Remarque : cette limite signifie aussi que $\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

EXERCICE III (EDHEC 2004)

1. (a) La fonction $x \mapsto -\frac{n^2}{x^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ (multiple de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$) donc $x \mapsto \exp(-\frac{n^2}{x^2})$ est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$, ce qui implique que f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et l'on a :

$$\forall x \neq 0, f'_n(x) = 2x \exp(-\frac{n^2}{x^2}) + x^2(-n^2(-\frac{2}{x^3})) \exp(-\frac{n^2}{x^2}) = \frac{x^2 + n^2}{2x} \exp(-\frac{n^2}{x^2})$$

- (b) Il s'agit donc en premier lieu de calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$. On effectue le changement de variable $X = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{X}$. Lorsque $x \rightarrow 0$, $X \rightarrow +\infty$ et l'on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \exp\left(-\frac{n^2}{x^2}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \exp(-n^2 X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \exp(-n^2 X) = 0$$

Ainsi, nous venons que $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0$ et comme $f_n(0) = 0$, on peut affirmer que la fonction f_n est continue en 0.

- (c) On effectue le changement de variable $X = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{X}}$. Lorsque $x \rightarrow 0$, $X \rightarrow +\infty$ et l'on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{n^2}{x^2}\right) &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \pm \sqrt{X} \exp(-n^2 X) = \pm \lim_{X \rightarrow +\infty} X^{1/2} \exp(-n^2 X) \\ &= \pm \lim_{X \rightarrow +\infty} \exp(-n^2 X) = 0 \end{aligned}$$

- (d) La combinaison des questions 1.a) et 1.b) montre que la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\times$. Il s'agit donc d'appliquer le théorème de prolongement continue de la dérivée. Il ne reste donc plus qu'à évaluer $\lim_{x \rightarrow 0} f'_n(x)$.

$$f'_n(x) = \frac{x^2 + n^2}{2x} \exp\left(-\frac{n^2}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{n^2}{2x} \exp\left(-\frac{n^2}{x^2}\right) = \frac{n^2}{2} \times \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{n^2}{x^2}\right) \rightarrow 0$$

Par conséquent, le théorème de prolongement s'applique et la fonction f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par :

$$f'_n(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + n^2}{2x} \exp\left(-\frac{n^2}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (a) La question 1.d) donne le calcul de f'_n et il est dès lors évident que le signe de f'_n est celui de x , c'est-à-dire que $f'_n < 0$ sur $\mathbb{R}_-^\times =]-\infty, 0[$, $f'_n > 0$ sur $\mathbb{R}_+^\times =]0, +\infty[$ et $f_n(0) = 0$
- (b) On effectue le changement de variable $X = \frac{1}{x^2}$. Lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, $X \rightarrow 0^+$ donc

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{1}{X}}_{\rightarrow +\infty} \underbrace{\exp(-n^2 X)}_{\rightarrow 1} = +\infty$$

et le tableau de variation de f est donnée par $f_n(x) = x^2 \exp(-\frac{n^2}{x^2})$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_n(x)$		-		+	
$f_n(x)$	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$	0	$\nearrow$	

3. (a) $e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$

- (b) Lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, $-\frac{n^2}{x^2} \rightarrow 0$ donc on a :

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{n^2}{x^2}\right) &= 1 + \left(-\frac{n^2}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{n^2}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^4}\right) = 1 - \frac{n^2}{x^2} + \frac{n^4}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \\ f_n(x) &= x^2 \exp\left(-\frac{n^2}{x^2}\right) = x^2 - n^2 + \frac{n^4}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

- (c) D'après le développement précédent, on a

$$[f_n(x) - (x^2 - n^2)] \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^4}{2x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_n(x) - (x^2 - n^2)] = 0$. Ainsi, la courbe (D_n) d'équation $y = x^2 - n^2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$

4. (a) D'après les questions 1.d) et 2.a), nous savons que la fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. Puisque $1 \in \mathbb{R} (= f_n(\mathbb{R}_+))$, on en déduit que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$ (existence et unicité de l'antécédent de 1 par f_n sur $\mathbb{R}_+$). Si u_n désigne cette solution, nous avons nécessairement $f_n(u_n) = 1$.
- (b) On compare les images par f_n (puisque u_n est solution de $f_n(x) = 1$). On a $f_n(u_n) = 1$ et $f_n(1) = \exp(-n^2) < 1$ donc $f_n(1) < f_n(u_n)$. La fonction f_n étant strictement croissante et bijective sur $\mathbb{R}_+$, on obtient que $1 < u_n$, c'est-à-dire que $u_n > 1.V$

(c) On compare de nouveau les images.: $f_n(u_n) = 1$ et

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{n}{\sqrt{2 \ln n}}\right) &= \left(\frac{n}{\sqrt{2 \ln n}}\right)^2 \exp\left(-\frac{n^2}{\left(\frac{n}{\sqrt{2 \ln n}}\right)^2}\right) = \frac{n^2}{2 \ln n} \exp(-2 \ln n) \\ &= \frac{n^2}{2 \ln n} \exp(\ln n^{-2}) = \frac{n^2}{2 \ln n} \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2 \ln n} < 1 \end{aligned}$$

si $n \geq 2$ donc $f_n\left(\frac{n}{\sqrt{2 \ln n}}\right) < f_n(u_n)$. La fonction f_n étant strictement croissante et bijective sur $\mathbb{R}_+$, on obtient que $\frac{n}{\sqrt{2 \ln n}} \leq u_n$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{2 \ln n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} n(\ln n)^{-1/2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{2}} = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

(d) Le réel u_n est solution de $f_n(x) = 1$, c'est-à-dire que l'on a :

$$f_n(u_n) = 1 \Leftrightarrow (u_n)^2 \exp\left(-\frac{n^2}{(u_n)^2}\right) = 1$$

En passant au logarithme, on a :

$$2 \ln u_n - \frac{n^2}{(u_n)^2} = 0 \Leftrightarrow 2 \ln u_n = \frac{n^2}{(u_n)^2} \Leftrightarrow 2(u_n)^2 \ln u_n = n^2$$

(e) On repasse de nouveau au logarithme,

$$\ln 2 + 2 \ln u_n + \ln(\ln u_n) = 2 \ln n$$

On sait que $\ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$ donc, puisque $X = \ln x \rightarrow +\infty$, on a $\ln X \underset{X \rightarrow +\infty}{=} o(X)$ donc $\ln(\ln x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\ln x)$

D'autre part, puisque $u_n \rightarrow +\infty$, on en déduit que $\ln(\ln u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\ln u_n)$, ce qui implique que

$$\ln 2 + 2 \ln u_n + \ln(\ln u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \ln u_n$$

et comme $\ln 2 + 2 \ln u_n + \ln(\ln u_n) = 2 \ln n$, nous pouvons affirmer que

$$2 \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \ln u_n \Leftrightarrow \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln u_n$$

Puisque $u_n > 0$, la question 4.d) montre que

$$u_n = \sqrt{\frac{n^2}{2 \ln u_n}} = \frac{n}{\sqrt{2 \ln u_n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\sqrt{2 \ln n}}$$

EXERCICE IV (Ecricome 1996 adapté)

Partie 1 : Etude du cas particulier $N = 2$

1. Au départ, l'urne A contient 2 boules noires et l'urne B deux boules blanches. Puisqu'à l'étape suivante, on pioche une boule de l'urne A (donc nécessairement 1 boule noire) et une boule dans l'urne B (donc nécessairement 1 boule blanche) puis que l'on échange ces boules d'urnes, on est certain qu'à l'issue de la première épreuve, l'urne A contient 1 boule blanche et 1 boule noire. Par conséquent, $Y_1 = 1$, autrement dit $Y_1(\Omega) = \{1\}$ et $p(Y_1 = 1) = 1$.

2. Voici le tableau récapitulant les valeurs des neuf probabilités conditionnelles

$P_{(Y_k=j)}(Y_{k+1}=i)$	$i=0$	$i=1$	$i=2$
$j=0$	0	1	0
$j=1$	1/4	1/2	1/4
$j=2$	0	1	0

Justification des calculs de probabilités conditionnelles

$P_{(Y_k=0)}(Y_{k+1}=0)$: on dispose d'aucune boule noire dans l'urne A (donc l'urne A contient 2 B et l'urne B contient 2 N) et l'on souhaite avoir aucune boule noire dans l'urne A après l'échange. (donc l'urne A contient 2 B et l'urne B contient 2N), ce qui est impossible (on pioche nécessairement 1 N dans l'urne B et 1 B dans l'urne A puis on échange)

$P_{(Y_k=0)}(Y_{k+1}=1)$: on dispose d'aucune boule noire dans l'urne A (donc l'urne A contient 2 B et l'urne B contient 2 N) et l'on souhaite avoir 1 boule noire dans l'urne A après l'échange. (donc l'urne A contient 1 B, 1 N et l'urne B contient 1 N, 1 B), ce qui arrive nécessairement (on pioche nécessairement 1 N dans l'urne B et 1 B dans l'urne A puis on échange) donc l'évènement est certain

$P_{(Y_k=0)}(Y_{k+1}=2)$: on dispose d'aucune boule noire dans l'urne A (donc l'urne A contient 2 B et l'urne B contient 2 N) et l'on souhaite avoir deux boules noires dans l'urne A après l'échange. (donc l'urne A contient 2 B et l'urne B contient 2 N), ce qui est impossible (on pioche nécessairement 1 N dans l'urne B et 1 B dans l'urne A puis on échange donc l'urne A ne contiendra qu'une boule noire et non deux)

$P_{(Y_k=1)}(Y_{k+1}=0)$: on dispose d'une boule noire dans l'urne A (donc l'urne A contient 1 B, 1 N et l'urne B contient 1 N, 1 B) et l'on souhaite avoir aucune boule noire dans l'urne A après l'échange. (donc l'urne A contient 2 B et l'urne B contient 2 N), ce qui se réalise si et seulement si on pioche la noire dans l'urne A (probabilité $\frac{1}{2}$) et la blanche dans l'urne B (probabilité $\frac{1}{2}$) donc la probabilité de réalisation est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P_{(Y_k=1)}(Y_{k+1}=1)$: on dispose d'une boule noire dans l'urne A (donc l'urne A contient 1 B, 1 N et l'urne B contient 1 N, 1 B) et l'on souhaite avoir une boule noire dans l'urne A après l'échange. (donc l'urne A contient 1 B, 1 N et l'urne B contient 1 N, 1 B), ce qui se réalise si et seulement si on pioche la blanche dans l'urne A (probabilité $\frac{1}{2}$) et la blanche dans l'urne B (probabilité $\frac{1}{2}$) ou on pioche la noire dans l'urne A (probabilité $\frac{1}{2}$) et la noire dans l'urne B (probabilité $\frac{1}{2}$) donc la probabilité de réalisation est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P_{(Y_k=1)}(Y_{k+1}=2)$: on dispose d'une boule noire dans l'urne A (donc l'urne A contient 1 B, 1 N et l'urne B contient 1 N, 1 B) et l'on souhaite avoir deux boules noires dans l'urne A après l'échange. (donc l'urne A contient 2 B et l'urne B contient 2 N), ce qui se réalise si et seulement si on pioche la blanche dans l'urne A (probabilité $\frac{1}{2}$) et la noire dans l'urne B (probabilité $\frac{1}{2}$) donc la probabilité de réalisation est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P_{(Y_k=2)}(Y_{k+1}=0)$: on dispose de deux boules noires dans l'urne A (donc l'urne A contient 2 N et l'urne B contient 2 B) et l'on souhaite avoir aucune boule noire dans l'urne A après l'échange. (donc l'urne A contient 2 N et l'urne B contient 2 B), ce qui est impossible (on pioche nécessairement 1 B dans l'urne B et 1 N dans l'urne A puis on échange donc l'urne A contiendra une boule noire et non zéro)

$P_{(Y_k=2)}(Y_{k+1}=1)$: on dispose de deux boules noires dans l'urne A (donc l'urne A contient 2 N et l'urne B contient 2 B) et l'on souhaite avoir une boule noire dans l'urne A après l'échange. (donc l'urne A contient 1 B, 1 N et l'urne B contient 1 N, 1 B), ce qui arrive nécessairement (on pioche nécessairement 1 B dans l'urne B et 1 N dans l'urne A puis on échange) donc l'évènement est certain

$P_{(Y_k=2)}(Y_{k+1}=2)$: on dispose deux boules noires dans l'urne A (donc l'urne A contient 2 N et l'urne B contient 2 B) et l'on souhaite avoir deux boules noires dans l'urne A après l'échange. (donc l'urne A contient 2 N et l'urne B contient 2 B), ce

qui est impossible (on pioche nécessairement 1 N dans l'urne B et 1 B dans l'urne A puis on échange)

3. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(Y_k = 0)$, $(Y_k = 1)$, $(Y_k = 2)$ et en utilisant la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} P(Y_{k+1}=0) &= P(Y_k=0)P_{(Y_k=0)}(Y_{k+1}=0) + P(Y_k=1)P_{(Y_k=1)}(Y_{k+1}=0) \\ &\quad + P(Y_k=2)P_{(Y_k=2)}(Y_{k+1}=0) \\ &= \frac{1}{4}P(Y_k=1) \end{aligned}$$

ce que l'on peut encore écrire $a_{k+1} = \frac{1}{4}b_k$. De la même façon, on obtient que

$$b_{k+1} = a_k + \frac{1}{2}b_k + c_k \quad c_{k+1} = \frac{1}{4}b_k$$

4. (a) Puisque le système d'évènements $(Y_k = 0)$, $(Y_k = 1)$, $(Y_k = 2)$ est complet, on a :

$$\begin{aligned} P(Y_k = 0) + P(Y_k = 1) + P(Y_k = 2) &= 1 \\ \Leftrightarrow a_k + b_k + c_k &= 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$b_{k+1} = a_k + c_k + \frac{1}{2}b_k = (1 - b_k) + \frac{1}{2}b_k = 1 - \frac{1}{2}b_k$$

- (b) La suite b est arithmético-géométrique.

Détermination de la constante L :

$$L = 1 - \frac{1}{2}L \Leftrightarrow \frac{3}{2}L = 1 \Leftrightarrow L = \frac{2}{3}$$

On introduit la suite v définie par : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_k = b_k - \frac{2}{3} \Leftrightarrow b_k = v_k + \frac{2}{3}$

$$v_{k+1} = b_{k+1} - \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2}b_k - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}b_k = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(v_k + \frac{2}{3}) = -\frac{1}{2}v_k$$

La suite v est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_0 \Leftrightarrow b_k - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(b_0 - \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow b_k = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{3}$$

Ensuite, puisque $a_{k+1} = c_{k+1} = \frac{1}{4}b_k$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = c_{k+1} = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{6}$$

En effectuant le changement de variable $n = k + 1 \Leftrightarrow k = n - 1$ (donc $n \geq 1$), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad a_n = c_n = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}$$

Remarquons que $a_n + b_n + c_n = 1$

5. Nous connaissons la loi de Y_k donc on calcule directement son espérance :

$$\begin{aligned} E(Y_k) &= 0 \times p(Y_k = 0) + 1 \times p(Y_k = 1) + 2 \times p(Y_k = 2) = b_k + 2c_k \\ &= -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \end{aligned}$$

donc l'espérance de Y_k est bien constante et égale à 1.

6. Calcul de $E((Y_k)^2)$ puis de $V(Y_k)$

$$\begin{aligned} E((Y_k)^2) &= 0^2 \times p(Y_k = 0) + 1^2 \times p(Y_k = 1) + 2^2 \times p(Y_k = 2) = b_k + 4c_k \\ &= -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{4}{3} \\ V(Y_k) &= E((Y_k)^2) - [E(Y_k)]^2 = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{4}{3} - 1 = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{donc } V(Y_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{3}$$

7. (a) Par définition, on a : $Z_2 = Y_1 - Y_2$. Puisque $Y_1 = 1$, on obtient $Z_2 = 1 - Y_2$. Puisque $Y_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, on en déduit que $Z_2(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$
- (b) $E(Z_2) = E(Y_1 - Y_2) = E(Y_1) - E(Y_2) = 1 - 1 = 0$
- (c) La loi de Y_2 est donnée par : $Y_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et

$$\begin{aligned} P(Y_2 = 0) &= a_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \\ P(Y_2 = 1) &= b_2 = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \\ P(Y_2 = 2) &= c_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

donc la loi de Z_2 est donnée par : $Z_2(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et

$$\begin{aligned} P(Z_2 = -1) &= P(1 - Y_2 = -1) = P(Y_2 = 2) = \frac{1}{4} \\ P(Z_2 = 0) &= P(1 - Y_2 = 0) = P(Y_2 = 1) = \frac{1}{2} \\ P(Z_2 = 1) &= P(1 - Y_2 = 1) = P(Y_2 = 0) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Partie 2 : Etude de $E(Y_k)$ et $E(Z_k)$ lorsque $N = 5$

1. Comme l'énoncé le mentionne, la variable Z_k représente la différence (algébrique, c'est-à-dire positive ou négative) entre le nombre après l'étape $(k - 1)$ et l'étape k . Puisque entre deux étapes, on échange une boule de l'urne A avec une boule de l'urne B, on peut soit enlever une boule noire (donc $Z_k = -1$), soit n'enlever aucune boule blanche (donc $Z_k = 0$), soit ajouter une boule noire (donc $Z_k = 1$). Par conséquent, on en déduit que $Z_k(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$

$P_{(Y_{k-1}=j)}(Z_k = i)$	$i = -1$	$i = 1$
$j = 0$	1	0
$j = 1$	16/25	1/25
$j = 2$	9/25	4/25
$j = 3$	4/25	9/25
$j = 4$	1/25	16/25
$j = 5$	0	1

Avant de commencer la justification des calculs, remarquons que si $Y_{k-1} = 3$ (on a 3 N dans l'urne A après la $(k - 1)^{\text{ième}}$ étape) et $Y_k = 4$ (on a 4 N dans l'urne A après la $k^{\text{ième}}$ étape), alors $Z_k = 3 - 4 = -1$. Autrement dit, si l'on a un gain (par exemple, +3) de boules noires, alors Z_k représente ce gain compté négativement (par exemple, -3) et si l'on a une perte de boules noires (par exemple, -3), alors Z_k représente cette perte comptée positivement (par exemple, +3).

On peut aussi le voir en remarquant que $Y_k = Y_{k-1} - Z_k$.

Justification des calculs de probabilités conditionnelles :

$P_{(Y_{k-1}=0)}(Z_k = -1)$: on dispose à l'instant $(k - 1)$ de 0 N dans l'urne A (donc 5 B dans A et 5 N dans B) et on doit gagner une boule noire. Cet événement est certain

$P_{(Y_{k-1}=1)}(Z_k = -1)$: on dispose à l'instant $(k - 1)$ de 1 N dans l'urne A (donc 1 N, 4 B dans A et 4 N, 1 B dans B) et on doit gagner une boule noire. Cet événement se réalise ssi on choisit 1 B dans A (probabilité 4/5) et 1 N dans B (probabilité 4/5)

donc la probabilité de réalisation de cet événement est $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$

$P_{(Y_{k-1}=2)}(Z_k = -1)$: on dispose à l'instant $(k-1)$ de 2 N dans l'urne A (donc 2 N, 3 B dans A et 3 N, 2 B dans B) et on doit gagner une boule noire. Cet événement se réalise ssi on choisit 1 B dans A (probabilité $3/5$) et 1 N dans B (probabilité $3/5$) donc la probabilité de réalisation de cet événement est $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

$P_{(Y_{k-1}=3)}(Z_k = -1)$: on dispose à l'instant $(k-1)$ de 3 N dans l'urne A (donc 3 N, 2 B dans A et 2 N, 3 B dans B) et on doit gagner une boule noire. Cet événement se réalise ssi on choisit 1 B dans A (probabilité $2/5$) et 1 N dans B (probabilité $2/5$) donc la probabilité de réalisation de cet événement est $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

$P_{(Y_{k-1}=4)}(Z_k = -1)$: on dispose à l'instant $(k-1)$ de 4 N dans l'urne A (donc 4 N, 1 B dans A et 1 N, 4 B dans B) et on doit gagner une boule noire. Cet événement se réalise ssi on choisit 1 B dans A (probabilité $1/5$) et 1 N dans B (probabilité $1/5$) donc la probabilité de réalisation de cet événement est $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

$P_{(Y_{k-1}=5)}(Z_k = -1)$: on dispose à l'instant $(k-1)$ de 5 N dans l'urne A (donc 5 N dans A et 5 B dans B) et on doit gagner une boule noire. Cet événement est impossible

$P_{(Y_{k-1}=0)}(Z_k = 1)$: on dispose à l'instant $(k-1)$ de 0 N dans l'urne A (donc 5 B dans A et 5 N dans B) et on doit perdre une boule noire. Cet événement est impossible

$P_{(Y_{k-1}=1)}(Z_k = 1)$: on dispose à l'instant $(k-1)$ de 1 N dans l'urne A (donc 1 N, 4 B dans A et 4 N, 1 B dans B) et on doit perdre une boule noire. Cet événement se réalise ssi on choisit 1 N dans A (probabilité $1/5$) et 1 B dans B (probabilité $1/5$) donc la probabilité de réalisation de cet événement est $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

$P_{(Y_{k-1}=2)}(Z_k = 1)$: on dispose à l'instant $(k-1)$ de 2 N dans l'urne A (donc 2 N, 3 B dans A et 3 N, 2 B dans B) et on doit perdre une boule noire. Cet événement se réalise ssi on choisit 1 N dans A (probabilité $2/5$) et 1 B dans B (probabilité $2/5$) donc la probabilité de réalisation de cet événement est $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

$P_{(Y_{k-1}=3)}(Z_k = 1)$: on dispose à l'instant $(k-1)$ de 3 N dans l'urne A (donc 3 N, 2 B dans A et 2 N, 3 B dans B) et on doit perdre une boule noire. Cet événement se réalise ssi on choisit 1 N dans A (probabilité $3/5$) et 1 B dans B (probabilité $3/5$) donc la probabilité de réalisation de cet événement est $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

$P_{(Y_{k-1}=4)}(Z_k = 1)$: on dispose à l'instant $(k-1)$ de 4 N dans l'urne A (donc 4 N,

1 B dans A et 1 N, 4 B dans B) et on doit perdre une boule noire. Cet événement se réalise ssi on choisit 1 N dans A (probabilité $4/5$) et 1 B dans B (probabilité $4/5$) donc la probabilité de réalisation de cet événement est $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$

$P_{(Y_{k-1}=5)}(Z_k = 1)$: on dispose à l'instant $(k-1)$ de 5 N dans l'urne A (donc 5 N dans A et 5 B dans B) et on doit perdre une boule noire. Cet événement est certain

2. Calcul de $P(Z_k = -1)$:

$$\begin{aligned} P(Z_k = -1) &= P(Y_{k-1} = 0)P_{(Y_{k-1}=0)}(Z_k = -1) + \dots \\ &\quad + P(Y_{k-1} = 5)P_{(Y_{k-1}=5)}(Z_k = -1) \\ &= P(Y_{k-1} = 0) + \frac{16}{25}P(Y_{k-1} = 1) + \frac{9}{25}P(Y_{k-1} = 2) \\ &\quad + \frac{4}{25}P(Y_{k-1} = 3) + \frac{1}{25}P(Y_{k-1} = 4) \end{aligned}$$

Calcul de $P(Z_k = 1)$

$$\begin{aligned} P(Z_k = 1) &= P(Y_{k-1} = 0)P_{(Y_{k-1}=0)}(Z_k = 1) + \dots \\ &\quad + P(Y_{k-1} = 5)P_{(Y_{k-1}=5)}(Z_k = 1) \\ &= \frac{1}{25}P(Y_{k-1} = 1) + \frac{4}{25}P(Y_{k-1} = 2) + \frac{9}{25}P(Y_{k-1} = 3) \\ &\quad + \frac{16}{25}P(Y_{k-1} = 4) + P(Y_{k-1} = 5) \end{aligned}$$

3. En utilisant la définition de l'espérance de Z_k et en utilisant les calculs de la question

précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
 E(Z_k) &= -1P(Z_k = -1) + 0P(Z_k = 0) + 1P(Z_k = 1) \\
 &= -P(Z_k = -1) + P(Z_k = 1) \\
 &= -[P(Y_{k-1} = 0) + \frac{16}{25}P(Y_{k-1} = 1) + \frac{9}{25}P(Y_{k-1} = 2) \\
 &\quad + \frac{4}{25}P(Y_{k-1} = 3) + \frac{1}{25}P(Y_{k-1} = 4)] \\
 &\quad + [\frac{1}{25}P(Y_{k-1} = 1) + \frac{4}{25}P(Y_{k-1} = 2) + \frac{9}{25}P(Y_{k-1} = 3) \\
 &\quad + \frac{16}{25}P(Y_{k-1} = 4) + P(Y_{k-1} = 5)] \\
 &= -P(Y_{k-1} = 0) - \frac{15}{25}P(Y_{k-1} = 1) - \frac{5}{25}P(Y_{k-1} = 2) \\
 &\quad + \frac{5}{25}P(Y_{k-1} = 3) + \frac{15}{25}P(Y_{k-1} = 4) + P(Y_{k-1} = 5)
 \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
 E(Y_{k-1}) &= P(Y_{k-1} = 1) + 2P(Y_{k-1} = 2) + 3P(Y_{k-1} = 3) \\
 &\quad + 4P(Y_{k-1} = 4) + 5P(Y_{k-1} = 5) \\
 \frac{2}{5}E(Y_{k-1}) &= \frac{2}{5}P(Y_{k-1} = 1) + \frac{4}{5}P(Y_{k-1} = 2) + \frac{6}{5}P(Y_{k-1} = 3) \\
 &\quad + \frac{8}{5}P(Y_{k-1} = 4) + 2P(Y_{k-1} = 5)
 \end{aligned}$$

on en déduit alors que

$$\begin{aligned}
 E(Z_k) - \frac{2}{5}E(Y_{k-1}) &= -P(Y_{k-1} = 0) - \frac{25}{25}P(Y_{k-1} = 1) - \frac{25}{25}P(Y_{k-1} = 2) \\
 &\quad - \frac{25}{25}P(Y_{k-1} = 3) - \frac{25}{25}P(Y_{k-1} = 4) - P(Y_{k-1} = 5) \\
 &= -(P(Y_{k-1} = 0) + P(Y_{k-1} = 1) + P(Y_{k-1} = 2) \\
 &\quad + P(Y_{k-1} = 3) + P(Y_{k-1} = 4) + P(Y_{k-1} = 5)) = -1
 \end{aligned}$$

4. L'égalité précédente combinée au fait que $Z_k = Y_{k-1} - Y_k$ montre que :

$$\begin{aligned}
 E(Y_{k-1} - Y_k) &= \frac{2}{5}E(Y_{k-1}) - 1 \Leftrightarrow E(Y_{k-1}) - E(Y_k) = \frac{2}{5}E(Y_{k-1}) - 1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{3}{5}E(Y_{k-1}) + 1 = E(Y_k) \Leftrightarrow E(Y_k) = \frac{3}{5}E(Y_{k-1}) + 1
 \end{aligned}$$

5. Recherche de la constante L :

$$\frac{3}{5}L + 1 = L \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{5}L \Leftrightarrow L = \frac{5}{2}$$

On introduit la suite u définie par : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = E(Y_k) - \frac{5}{2} \Leftrightarrow E(Y_k) = u_k + \frac{5}{2}$

$$u_{k+1} = E(Y_{k+1}) - \frac{5}{2} = \frac{3}{5}E(Y_k) + 1 - \frac{5}{2} = \frac{3}{5}E(Y_k) - \frac{3}{2} = \frac{3}{5}(u_k + \frac{5}{2}) - \frac{3}{2} = \frac{3}{5}u_k$$

La suite u est géométrique de raison $\frac{3}{5}$ donc :

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k &= \left(\frac{3}{5}\right)^k u_0 \Leftrightarrow E(Y_k) - \frac{5}{2} = \left(\frac{3}{5}\right)^k (E(Y_0) - \frac{5}{2}) \\
 &\Leftrightarrow E(Y_k) = \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(5 - \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^k + \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad E(Z_k) = \frac{2}{5}E(Z_{k-1}) - 1 = \frac{2}{5} \left(\frac{5}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^{k-1} + \frac{5}{2} \right) - 1 = \left(\frac{3}{5} \right)^{k-1}$$

6. Puisque $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{5}$ appartiennent à $] -1, 1[$, on en déduit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} E(Y_k) = \frac{5}{2}$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} E(Z_k) = 0$.