EXERCICE I (EML 1987)

1. On note A_k l'évènement " à l'issue de la procédure de lancers de dé, on obtient le numéro k ".

   (a) Pour obtenir les 2, 3, 4, 5 et 6, il suffit de lancer une seule fois le dé. Puisque les probabilités d'apparition des différentes faces sont équiprobables, on a

$$\boxed{p(A_2) = p(A_3) = p(A_4) = p(A_5) = p(A_6) = \frac{1}{6}.}$$

   (b) Pour obtenir le numéro 1 ou 7, il est indispensable de lancer deux fois le dé et donc le choixd'obtenir au premier lancer le numéro 1. Si l'on introduit l'évènement B : " obtenir le numéro 1 au premier tour ", on a évidemment $A_1 = B \cap A_1$, ce qui nous donne donc on a

$$\boxed{p(A_1) = p(B_1 \cap A_1) = p(B_1) \times p_{B_1}(A_1) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{12}}$$

   Justification du calcul de probabilité : En effet, la probabilité conditionnelle $p_{B_1}(A_1)$ signifie que l'on a obtenu le numéro 1 au premier lancer de dé et que l'on souhaite obtenir au final le numéro 1, c'est-à-dire que lors du second lancer de dé, on obtient le 1,2 ou 3 (d'après la procédure) et comme les faces du dé sont équiprobables, on a bien $p_{B_1}(A_1) = \frac{3}{6}$.
   On pourrait également introduire le système complet d'évènements B_k " obtenir le numéro k lors du premier lancer de dé ". Par application de la formule des probabilités totales, on serait amené à calculer les probabilités $p(B_k \cap A_1)$. Ces probabilités sont nulles si $k \neq 1$ car l'obtention d'un numéro différent du 1 au premier tirage interdit de lancer la pièce et donc d'avoir au final le 1. Pour finir, l'évènement B_1 est exactement l'évènement B que nous avons considéré.

   De la même façon, on a

$$\boxed{p(A_7) = p(B_1 \cap A_7) = p(B_1) \times p_{B_1}(A_7) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{12}}$$

2. Pour tout entier n, on introduit l'évènement

$$C_n : \text{" obtenir } n \text{ boules noires aux } n^{ième} \text{ premiers lancers "}$$

   L'obtention d'une face noire dépend du dé D_i choisi, le choix du dé D_i étant exactement induit par le numéro attribué lors de la procédure de lancer de dé, c'est-à-dire de la réalisation, ou non, des différents évènements $(A_k)_{k \in [\![1,7]\!]}$. Ces évènements forment un système complet

   (a) Il s'agit de calculer la probabilité $p(C_1)$, ce que l'on fait par application de la formule des probabilités avec le système complet d'évènements $(A_k)_{k \in [\![1,7]\!]}$

$$\begin{aligned} p(C_1) &= p(A_1 \cap C_1) + p(A_2 \cap C_1) + p(A_3 \cap C_1) + p(A_4 \cap C_1) + p(A_5 \cap C_1) + p(A_6 \cap C_1) + \underbrace{p(A_7 \cap C_1)}_{=0} \\ &= p(A_1)p_{A_1}(C_1) + p(A_2)p_{A_2}(C_1) + p(A_3)p_{C_3}(C_1) + p(A_4)p_{A_4}(C_1) + p(A_5)p_{A_5}(C_1) + p(A_6)p_{A_6}(C_1) \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{6}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir 1 boule noire est égale à } \frac{1}{2}}$$

   Justification du calcul de probabilité :
   $p(A_7 \cap C_1)$: L'évènement $A_7 \cap C_1$ est impossible car on doit obtenir une boule noire en lançant le dé D_7 qui possède $7 - 7 = 0$ faces noires.

   $p_{A_i}(C_1)$ pour $k \in [\![1,6]\!]$: il s'agit de calculer la probabilité d'obtenir une face noire en lançant une fois le dé D_i qui possède 6 faces dont $i-1$ faces blanches et $7-i$ faces noires donc $p_{A_i}(C_1) = \frac{7-i}{6}$ (par exemple, $p_{A_4}(C_1) = \frac{7-4}{6} = \frac{3}{6}$)

(b) Il s'agit de calculer la probabilité $p(C_2)$, ce que l'on fait par application de la formule des probabilités avec le système complet d'évènements $(A_k)_{k\in[\![1,7]\!]}$

$$\begin{aligned}
p(C_2) &= p(A_1\cap C_2)+p(A_2\cap C_2)+p(A_3\cap C_2)+p(A_4\cap C_2)+p(A_5\cap C_2)+p(A_6\cap C_2)+\underbrace{p(A_7\cap C_2)}_{=0}\\
&= p(A_1)p_{A_1}(C_2)+p(A_2)p_{A_2}(C_2)+p(A_3)p_{C_3}(C_2)+p(A_4)p_{A_4}(C_2)+p(A_5)p_{A_5}(C_2)+p(A_6)p_{A_6}(C_2)\\
&= \frac{1}{12}\times(\frac{6}{6})^2+\frac{1}{6}\times(\frac{5}{6})^2+\frac{1}{6}\times(\frac{4}{6})^2+\frac{1}{6}\times(\frac{3}{6})^2+\frac{1}{6}\times(\frac{2}{6})^2+\frac{1}{6}\times(\frac{1}{6})^2=\frac{73}{216}\simeq 0.338\pm 10^{-3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a environ 33,8 \% de chance d'obtenir 2 boules noires en deux lancers}}$$

Justification du calcul de probabilité :
$\underline{p(A_7\cap C_2)}$ *: L'évènement $A_7\cap C_2$ est impossible car on doit obtenir une boule noire en lançant le dé D_7 qui possède $7-7=0$ faces noires.*

$\underline{p_{A_i}(C_2) \text{ pour } k\in[\![1,6]\!]}$ *: il s'agit de calculer la probabilité d'obtenir deux faces noires en lançant deux fois le dé D_i qui possède 6 faces dont $i-1$ faces blanches et $7-i$ faces noires, puisqu'à chaque lancer on $\frac{7-i}{6}$ chance d'obtenir la face noire et qu'on lance le dé D_i deux fois, on a donc $p_{A_i}(C_2)=(\frac{7-i}{6})^2$ (par exemple, $p_{A_4}(C_2)=(\frac{7-4}{6})^2=(\frac{3}{6})^2$)*

(c) Il s'agit de calculer la probabilité $p(C_3)$, ce que l'on fait par application de la formule des probabilités avec le système complet d'évènements $(A_k)_{k\in[\![1,7]\!]}$

$$\begin{aligned}
p(C_3) &= p(A_1\cap C_3)+p(A_2\cap C_3)+p(A_3\cap C_3)+p(A_4\cap C_3)+p(A_5\cap C_3)+p(A_6\cap C_3)+\underbrace{p(A_7\cap C_3)}_{=0}\\
&= p(A_1)p_{A_1}(C_3)+p(A_2)p_{A_2}(C_3)+p(A_3)p_{C_3}(C_3)+p(A_4)p_{A_4}(C_3)+p(A_5)p_{A_5}(C_3)+p(A_6)p_{A_6}(C_3)\\
&= \frac{1}{12}\times(\frac{6}{6})^3+\frac{1}{6}\times(\frac{5}{6})^3+\frac{1}{6}\times(\frac{4}{6})^3+\frac{1}{6}\times(\frac{3}{6})^3+\frac{1}{6}\times(\frac{2}{6})^3+\frac{1}{6}\times(\frac{1}{6})^3=\frac{37}{144}\simeq 0.257\pm 10^{-3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a environ 25,7 \% de chance d'obtenir 3 boules noires en trois lancers}}$$

Justification du calcul de probabilité :
$\underline{p(A_7\cap C_3)}$ *: L'évènement $A_7\cap C_3$ est impossible car on doit obtenir une boule noire en lançant le dé D_7 qui possède $7-7=0$ faces noires.*
$\underline{p_{A_i}(C_3) \text{ pour } k\in[\![1,6]\!]}$ *: il s'agit de calculer la probabilité d'obtenir trois faces noires en lançant trois fois le dé D_i qui possède 6 faces dont $i-1$ faces blanches et $7-i$ faces noires, puisqu'à chaque lancer on $\frac{7-i}{6}$ chance d'obtenir la face noire et qu'on lance le dé D_i trois fois, on a donc $p_{A_i}(C_3)=(\frac{7-i}{6})^3$ (par exemple, $p_{A_4}(C_3)=(\frac{7-4}{6})^3=(\frac{3}{6})^3$)*

3. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle $p_{C_2}(N_3)$ (où N_3 est l'évènement " obtenir une boule noire au troisème lancer ") ce que l'on fait en utilisant la formule mathématique de la probabilité conditionnelle (car on ne peut raisonnablement réinterpréter cette probabilité conditionnelle, étant donné que l'on ne sait pas avec quel dé on lance). Puisque " obtenir 2 boules noires aux deux premiers lancers et 1 boule noire au troisième lancers " signifie " obtenir trois boules noires aux trois premiers lancers ", on a

$$p_{C_2}(N_3)=\frac{p(C_2\cap N_3)}{p(C_2)}=\frac{p(C_3)}{p(C_2)}=\frac{\frac{37}{144}}{\frac{73}{216}}=\frac{111}{146}\simeq 0.760\pm 10^{-3}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{On a environ 76 \% de chance d'obtenir une noire au troisième lancer}\\ \text{lorsqu'on a obtenu 2 boules noires aux deux premiers lancers}\end{array}}$$

EXERCICE II (HEC 2000)

1. (a) De façon évidente, on a

$$J_0=\mathcal{A}_0,\quad J_1=\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1,\quad J_2=\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2,\quad J_3=\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2\cap\mathcal{A}_3\quad J_4=\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2\cap\mathcal{A}_3\cap\mathcal{A}_4$$

ce qui nous fournit directement les probabilités attendues
Calcul de $p(J_0)$: $p(J_0) = p(\mathcal{A}_0) = 1$
Calcul de $p(J_1)$: $p(J_1) = p(\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_1) = p(\mathcal{A}_0)p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{A}_1) = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$
Calcul de $p(J_2)$: $p(J_2) = p(\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = p(\mathcal{A}_0)p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{A}_1)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1}(\mathcal{A}_2) = 1 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = (\frac{2}{3})^2$
Calcul de $p(J_3)$:

$$p(J_3) = p(\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3) = p(\mathcal{A}_0)p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{A}_1)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1}(\mathcal{A}_2)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2}(\mathcal{A}_3) = 1 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = (\frac{2}{3})^3$$

$p(J_0) = 1$	$p(J_1) = \frac{2}{3}$	$p(J_2) = (\frac{2}{3})^2$	$p(J_3) = (\frac{2}{3})^3$

Justification des calculs de probabilités :
Si le jeton A se trouve dans la cas C_0 après un certain nombre d'opérations et qu'il doit y être encore à l'issue de l'opération suivante, cela signifie que l'on doit pioche le jeton b ou c. La probabilité de piocher le jeton b ou c étant $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, chaque probabilité conditionnelle est égale à $\frac{2}{3}$

(b) Le calcul est très simple :

$$p(J_n) = p(\mathcal{A}_0 \cap \underbrace{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_{n-1} \cap \mathcal{A}_n}_{n \text{ évènements}}) = p(\mathcal{A}_0)p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{A}_1)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1}(\mathcal{A}_2)\cdots p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2\cap\cdots\cap\mathcal{A}_{n-1}}(\mathcal{A}_n) = (\frac{2}{3})^n$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad p(J_n) = (\frac{2}{3})^n}$$

2. (a) $D_2 = \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_2, \quad D_3 = \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{A}_3$ et $D_4 = \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3 \cap \mathcal{A}_4$
L'évènement D_1 est impossible (pour revenir pour la première fois en C_0, il faut avoir quitter C_0 puis revenir à C_0, ce qui implique au moins deux opérations) donc $p(D_1) = 0$
Calcul de $p(D_2)$:

$$p(D_2) = p(\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}_2) = p(\mathcal{A}_0)p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{B}_1)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_2) = 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^2$$

Justification des calculs de probabilités :
$\underline{p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{B}_1)}$: le jeton A se trouve dans la cas C_0 et il doit aller dans la case C_1. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A change de place, c'est-à-dire que l'on pioche le jeton a. La probabilité de piocher le jeton a étant $\frac{1}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{B}_1) = \frac{1}{3}$
$\underline{p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_2)}$: le jeton A se trouve dans la cas C_1 à l'issue de la $1^{ière}$ opération et il doit aller dans la case C_0. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A change de place, c'est-à-dire que l'on pioche le jeton a. La probabilité de piocher le jeton a étant $\frac{1}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_2) = \frac{1}{3}$
Calcul de $p(D_3)$:

$$\begin{aligned} p(D_3) &= p(\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{A}_3) = p(\mathcal{A}_0)p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{B}_1)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2}(\mathcal{A}_3) \\ &= 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3}) \end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités :
$\underline{p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)}$: le jeton A se trouve dans la cas C_1 à l'issue de la $1^{ière}$ opération et il doit rester dans la case C_1. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A ne change pas de place, c'est-à-dire que l'on pioche le jeton b ou c. La probabilité de piocher le jeton b ou c étant $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) = \frac{2}{3}$
$\underline{p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2}(\mathcal{A}_3)}$: le jeton A se trouve dans la cas C_1 et il doit aller dans la case C_0. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A change de place, c'est-à-dire que l'on pioche le jeton a. La probabilité de piocher le jeton a étant $\frac{1}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2}(\mathcal{A}_3) = \frac{1}{3}$
Calcul de $p(D_4)$:

$$\begin{aligned} p(D_4) &= p(\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3 \cap \mathcal{A}_4) = p(\mathcal{A}_0)p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{B}_1)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_3)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\mathcal{B}_3}(\mathcal{A}_4) \\ &= 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^2 \times (\frac{2}{3})^2 \end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités :
$\underline{p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_3)}$ *: le jeton A se trouve dans la cas C_1 à l'issue de la $2^{ième}$ opération et il doit rester dans la case C_1. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A ne change pas de place, c'est-à-dire que l'on pioche le jeton b ou c. La probabilité de piocher le jeton b ou c étant $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_3)=\frac{2}{3}$*
$\underline{p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\mathcal{B}_3}(\mathcal{A}_4)}$ *: le jeton A se trouve dans la cas C_1 à l'issue de la $3^{ième}$ opération et il doit aller dans la case C_0. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A change de place, c'est-à-dire que l'on pioche le jeton a. La probabilité de piocher le jeton a étant $\frac{1}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\mathcal{B}_3}(\mathcal{A}_4)=\frac{1}{3}$*

$p(D_1)=0$	$p(D_2)=(\frac{1}{3})^2$	$p(D_3)=(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})$	$p(D_4)=(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2$

(b) Si $n\geqslant 2$, on a : $D_n=\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\cdots\cap\mathcal{B}_{n-1}\cap\mathcal{A}_n$
Calcul de $p(D_n)$ lorsque $n\geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
p(D_n) &= p(\mathcal{A}_0\cap\underbrace{\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\cdots\cap\mathcal{B}_{n-2}\cap\mathcal{B}_{n-1}}_{n-1\text{ évènements}}\cap\mathcal{A}_n)\\
&= p(\mathcal{A}_0)p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{B}_1)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)\cdots p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\cdots\cap\mathcal{B}_{n-2}}(\mathcal{B}_{n-1})p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\cdots\cap\mathcal{B}_{n-1}}(\mathcal{A}_n)\\
&= 1\times\frac{2}{3}\times\underbrace{\frac{1}{3}\times\cdots\times\frac{1}{3}}_{n-2\text{ évènements}}\times\frac{2}{3}=(\frac{1}{3})^{n-2}\times(\frac{2}{3})^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\geqslant 2,\quad p(D_n)=(\frac{1}{3})^{n-2}\times(\frac{2}{3})^2}$$

Justification des calculs de probabilités :
$\underline{p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\cdots\cap\mathcal{B}_k}(\mathcal{B}_{k+1})}$ *: le jeton A se trouve dans la cas C_1 à l'issue de la $k^{ième}$ opération et il doit rester dans la case C_1. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A ne change pas de place, c'est-à-dire que l'on pioche le jeton b ou c. La probabilité de piocher le jeton b ou c étant $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\cdots\cap\mathcal{B}_k}(\mathcal{B}_{k+1})=\frac{2}{3}$*
$\underline{p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\cdots\cap\mathcal{B}_{n-1}}(\mathcal{A}_n)}$ *: le jeton A se trouve dans la cas C_1 à l'issue de la $(n-1)^{ième}$ opération et il doit aller dans la case C_0. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A change de place, c'est-à-dire que l'on pioche le jeton a. La probabilité de piocher le jeton a étant $\frac{1}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\cdots\cap\mathcal{B}_{n-1}}(\mathcal{A}_n)=\frac{1}{3}$*

3. (a) La position du jeton A à l'issue de le $(n+1)^{ième}$ opération dépend de la lettre obtenue (a,b ou c) mais aussi de sa position à l'issue de la $n^{ième}$ opération. Etant donné que la position à l'issue de la $n^{ième}$ opération précède l'obtention de la lettre, on introduit la famille $(\mathcal{A}_n,\mathcal{B}_n)$ qui constitue un système complet d'évènements. On a donc :

$$\begin{cases}
p(\mathcal{A}_{n+1})=p(\mathcal{A}_n\cap\mathcal{A}_{n+1})+p(\mathcal{B}_n\cap\mathcal{A}_{n+1})=p(\mathcal{A}_n)p_{\mathcal{A}_n}(\mathcal{A}_{n+1})+p(\mathcal{B}_n)p_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{A}_{n+1})=\frac{2}{3}p(\mathcal{A}_n)+\frac{1}{3}p(\mathcal{B}_n)\\
p(\mathcal{B}_{n+1})=p(\mathcal{A}_n\cap\mathcal{B}_{n+1})+p(\mathcal{B}_n\cap\mathcal{B}_{n+1})=p(\mathcal{A}_n)p_{\mathcal{A}_n}(\mathcal{B}_{n+1})+p(\mathcal{B}_n)p_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{B}_{n+1})=\frac{1}{3}p(\mathcal{A}_n)+\frac{2}{3}p(\mathcal{B}_n)
\end{cases}$$

$$\boxed{\forall n\geqslant 0,\quad \begin{cases} p(\mathcal{A}_{n+1})=\frac{2}{3}p(\mathcal{A}_n)+\frac{1}{3}p(\mathcal{B}_n)\\ p(\mathcal{B}_{n+1})=\frac{1}{3}p(\mathcal{A}_n)+\frac{2}{3}p(\mathcal{B}_n)\end{cases}}$$

Justification des calculs de probabilités conditionnelles :
$\underline{p_{\mathcal{A}_n}(\mathcal{A}_{n+1})}$ *: le jeton A est dans la cas C_0 et il doit se trouver à l'issue de l'opération suivante dans la case C_0. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A ne change pas de case, c'est-à-dire si l'on obtient les lettres b ou c. Puisque la probabilité d'obtenir les lettres b ou c est $\frac{2}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_n}(A_{n+1})=\frac{2}{3}$*
$\underline{p_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{A}_{n+1})}$ *: le jeton A est dans la cas C_1 et il doit se trouver à l'issue de l'opération suivante dans la case C_0. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A change de case, c'est-à-dire si l'on obtient la lettre a. Puisque*

la probabilité d'obtenir la lettre a est $\frac{1}{3}$, *on a* $p_{\mathcal{B}_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$

$\underline{p_{\mathcal{A}_n}(\mathcal{B}_{n+1})}$ *: le jeton A est dans la cas* C_0 *et il doit se trouver à l'issue de l'opération suivante dans la case* C_1*. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A change de case, c'est-à-dire si l'on obtient la lettre a. Puisque la probabilité d'obtenir la lettre a est* $\frac{1}{3}$, *on a* $p_{\mathcal{A}_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3}$

$\underline{p_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{B}_{n+1})}$ *: le jeton A est dans la cas* C_1 *et il doit se trouver à l'issue de l'opération suivante dans la case* C_1*. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A ne change pas de case, c'est-à-dire si l'on obtient les lettres b ou c. Puisque la probabilité d'obtenir les lettres b ou c est* $\frac{2}{3}$, *on a* $p_{\mathcal{B}_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}$

(b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n) : \forall n \geqslant 0, \quad p(\mathcal{A}_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^n} \quad \text{et} \quad p(\mathcal{B}_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}$$

Initialisation : Puisque le jeton A est au départ dans la case C_0, on a : $p(\mathcal{A}_0) = 1$ et $p(\mathcal{B}_0) = 0$. D'autre part, on a

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

donc on a bien $p(\mathcal{A}_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^0}$ et $p(\mathcal{B}_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^0}$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.

Hérédité : supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{H}_{n+1})$, c'est-à-dire, supposons que

$$p(\mathcal{A}_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^n} \quad \text{et} \quad p(\mathcal{B}_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}$$

et montrons que

$$p(\mathcal{A}_{n+1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^{n+1}} \quad \text{et} \quad p(\mathcal{B}_{n+1}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n+1}}$$

Pour commencer, on a $\begin{cases} p(\mathcal{A}_{n+1}) = \frac{2}{3}p(\mathcal{A}_n) + \frac{1}{3}p(\mathcal{B}_n) \\ p(\mathcal{B}_{n+1}) = \frac{1}{3}p(\mathcal{A}_n) + \frac{2}{3}p(\mathcal{B}_n) \end{cases}$ et l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{H}_n)$ nous donne alors

$$\begin{cases} p(\mathcal{A}_{n+1}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^n}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^{n+1}} \\ p(\mathcal{B}_{n+1}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^n}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n+1}} \end{cases}$$

donc $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \geqslant 0, \quad (\mathcal{H}_n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad p(\mathcal{A}_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^n} \quad \text{et} \quad p(\mathcal{B}_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}}$$

EXERCICE III (extrait d'ESCAE 1988, "ancêtre" d'ECRICOME)

On commence par traduire l'énoncé. Pour cela, on introduit naturellement les évènements

I : " être un contrevenant involontaire " et V : " être verbalisé "

On a donc : $p(I) = \frac{1}{4}, \quad p(\overline{I}) = \frac{3}{4}, \quad p_I(V) = \frac{1}{40}$ et $p_{\overline{I}}(V) = \frac{1}{60}$

1. Il s'agit donc de calculer la probabilité $p(V)$. On utilise pour cela le système complet d'évènements $(I, \overline{I})$ et l'on a

$$p(V) = p(I \cap V) + p(\overline{I} \cap V) = p(I)p_I(V) + p(\overline{I})p_{\overline{I}}(V) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{40} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{60} = \frac{3}{160} \simeq 0.019 \div 10^{-3}$$

$\boxed{\text{Il y a environ 1,9 \% de chance qu'un stationnement irrégulier soit sanctionné}}$

2. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle $p_V(\overline{I})$. Ne povant réinterpréter cette probabilité conditionnelle, on utilise la formule mathématique définissant cette probabilité conditionnelle, ce qui nous donne :

$$p_V(\overline{I}) = \frac{p(V \cap \overline{I})}{p(V)} = \frac{p(\overline{I} \cap V)}{P(V)} = \frac{p(\overline{I})p_{\overline{I}}(V)}{p(V)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{60}}{\frac{3}{160}} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\text{On a 2 chances sur 3 d'être un contrevenant volontaire lorsqu'on est verbabilisé}}$$

3. Pour $k \in [\![0, 300]\!]$, on note A_k l'évènement :

A_k : " être verbalisé k fois verbalisés au cours de 300 stationnements irréguliers "

Au cours de ses activités professionnelles, un certain contrevenant volontaire se trouve 300 fois dans l'année en stationnement irréguliers et a donc, chaque fois, une probabilité de $\frac{1}{60}$ d'être verbalisé.
Quelle est la probabilité qu'il soit verbalisé :

(a) Il s'agit de calculer $p(A_0)$. A chaque stationnement, la probabilité de ne pas être verbalisé vaut $1 - \frac{1}{60}$, on a :

$$p(A_0) = \left(1 - \frac{1}{60}\right)^{300} \simeq 0.006 \pm 10^{-3}$$

$$\boxed{\text{On a environ 0,6 \% de chance de ne pas être verbalisé en 300 stationnements irréguliers}}$$

(b) Il s'agit de calculer $p(A_1)$. A chaque stationnement, la probabilité d'être verbalisé vaut $\frac{1}{60}$, on choisit l'un des 300 stationnements irréguliers où l'on a va être verbalisé ($\binom{360}{1}$ choix), la probabilité d'être verbalisé pour ce stationnement irrégulier vaut $\frac{1}{60}$ et la probabilité de ne pas être verbalisé pendant les $300 - 1 = 299$ autres stationnements vaut $(1 - \frac{1}{60})^{299}$, donc on a :

$$p(A_1) = \binom{360}{1}\left(\frac{1}{60}\right)\left(1 - \frac{1}{60}\right)^{299} \simeq 0.040 \pm 10^{-3}$$

$$\boxed{\text{On a environ 4 \% de chance d'être verbalisé une seule fois en 300 stationnements irréguliers}}$$

(c) Il s'agit de calculer $p(A_{10})$. A chaque stationnement, la probabilité d'être verbalisé vaut $\frac{1}{60}$, on choisit 10 des 300 stationnements irréguliers où l'on a va être verbalisé ($\binom{360}{10}$ choix), la probabilité d'être verbalisé pour ces 10 stationnements irréguliers vaut $(\frac{1}{60})^{10}$ et la probabilité de ne pas être verbalisé pendant les $300 - 10 = 290$ autres stationnements vaut $(1 - \frac{1}{60})^{290}$, donc on a :

$$p(A_1) = \binom{360}{10}\left(\frac{1}{60}\right)^{10}\left(1 - \frac{1}{60}\right)^{290} \simeq 0.112 \pm 10^{-3}$$

$$\boxed{\text{On a environ 11,2 \% de chance d'être verbalisé 10 fois en 300 stationnements irréguliers}}$$

(d) Il s'agit de calculer $p(A_k)$. A chaque stationnement, la probabilité d'être verbalisé vaut $\frac{1}{60}$, on choisit k des 300 stationnements irréguliers où l'on a va être verbalisé ($\binom{360}{k}$ choix), la probabilité d'être verbalisé pour ces k stationnements irréguliers vaut $(\frac{1}{60})^k$ et la probabilité de ne pas être verbalisé pendant les $300 - k$ autres stationnements vaut $(1 - \frac{1}{60})^{300-k}$, donc on a :

$$\forall k \in [\![0, 300]\!], \quad p(A_k) = \binom{360}{k}\left(\frac{1}{60}\right)^k\left(1 - \frac{1}{60}\right)^{300-k}$$

$$\boxed{\text{La probabilité d'être verbalisé } k \text{ fois en 300 stationnements irréguliers vaut } \binom{360}{k}\left(\frac{1}{60}\right)^k\left(1 - \frac{1}{60}\right)^{300-k}}$$

EXERCICE IV (extrait EDHEC 2003)

1. Cela résulte essentiellement de la règle des signes.
   Si $x > 0$, alors $e^x > 1$ donc $e^x - 1 > 0$ donc $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.
   Si $x < 0$, alors $e^x < 1$ donc $e^x - 1 < 0$ donc (le quotient de deux négatifs étant négatif) $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

2. (a) Il s'agit de calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)$. Pour commencer, on remarque que $\dfrac{e^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$ (formule de cours) donc $\ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\to}$ $\ln 1 = 0$ et comme $f(0) = 0$, on a bien $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = f(0)$, ce qui signifie que $\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$

   (b) En $-\infty$, e^x tend vers 0 donc $e^x - 1$ tend vers -1 et x tend vers $-\infty$ donc $\dfrac{e^x - 1}{x} \underset{x\to -\infty}{\to} 0$ "$\dfrac{0}{\infty} = 0$"
   En $+\infty$, e^x tend vers $+\infty$ et 1 est constant donc le terme dominant de $e^x - 1$ est e^x. On écrit alors

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{x} = \frac{e^x}{x}(1 - e^{-x}).$$

   Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} (1 - e^{-x}) = 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} = +\infty$ "$+\infty \times 1 = +\infty$".
   Puisque $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

   (c) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc on va étudier l'existence de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. D'après l'indication de l'énoncé, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(e^x - 1) - \ln x}{x}$$

   Il s'agit d'expliciter le terme dominant au numérateur. Pour cela, on constate que le terme dominant en $+\infty$ dans le logarithme est e^x, on a donc

$$\ln(e^x - 1) = \ln(e^x[1 - e^{-x}]) = \ln e^x + \ln(1 - e^{-x}) = x + \ln(1 - e^{-x})$$

   d'où

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x + \ln(1 - e^{-x}) - \ln x}{x} = 1 + \frac{\ln(1 - e^{-x})}{x} - \frac{\ln x}{x}$$

   Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 - e^{-x}) = \ln 1 = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1 - e^{-x})}{x} = 0$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

   Etudions maintenant l'existence de $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$.

$$f(x) - x = \ln(e^x - 1) - \ln x - x = x + \ln(1 - e^{-x}) - \ln x - x = \ln(1 - e^{-x}) - \ln x$$

   et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 - e^{-x}) = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty$, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = -\infty$$

$$\boxed{\text{La courbe représentative } \mathcal{C}_f \text{ de } f \text{ admet donc une branche parabolique de direction la droite } y = x}$$

3. (a) En utilisant les classiques formules $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ et $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, on a

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = \frac{\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)'}{\dfrac{e^x - 1}{x}} = \frac{\dfrac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2}}{\dfrac{e^x - 1}{x}} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$$

$$\boxed{\forall x \neq 0, \quad f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}}$$

(b) On commence par calculer la dérivée de g

$$g'(x) = \underbrace{e^x + xe^x}_{(uv)'=u'v+uv'} - e^x = xe^x,$$

le signe de g' étant le signe de x, nous obtenons le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

(c) La fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ et comme $\forall x \neq 0, \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(e^x-1)}$, on obtient le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$+$	
x		$-$		$+$	
$e^x - 1$		$-$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(d) On se lance dans le calcul.

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) - x = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) - \ln e^x = \ln\left[\frac{\frac{e^x-1}{x}}{e^x}\right] = \ln\left[\frac{e^x-1}{x} \times e^{-x}\right] \\ &= \ln\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) = \ln\left(\frac{e^{-x}-1}{-x}\right) = f(-x) \end{aligned}$$

D'après la question 3.d), pour tout réel $x > 0$, $-x$ est strictement négatif et comme f est négative sur $\mathbb{R}_+^\times$, on a $f(-x) < 0$ donc donc $\boxed{f(x) - x < 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^\times}$

4. (a) On procède par récurrence en considérant l'hypothèse de récurrence : $(\mathcal{H}_n) : u_n > 0$
Initialisation : $u_0 > 0$ d'après l'énoncé donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{H}_{n+1})$, c'est-à-dire, supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$. Puisque $u_n > 0$ et que la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^\times$, on a $f(u_n) > 0$ et comme $u_{n+1} = f(u_n)$, on en déduit que $u_{n+1} > 0$ donc $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie.
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.}$

(b) On doit étudier le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. On sait que la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^\times$ et que $u_n > 0$, on en déduit que $f(u_n) - u_n < 0$ donc la suite u est décroissante.

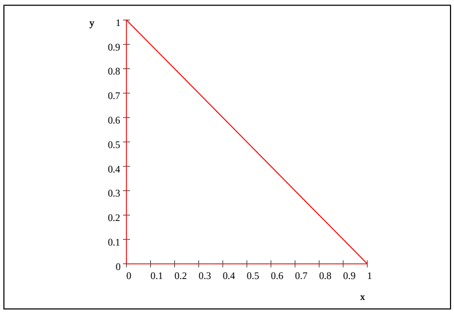
(c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 (car $\forall n \geqslant 0, \quad u_n > 0$) donc elle converge et soit L sa limite.
Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, on a $\left.\begin{array}{r} u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} L \\ f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f(L) \end{array}\right\}$ et comme $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = f(u_n)$, on en déduit que

$$L = f(L) \Leftrightarrow f(L) - L = 0 \underset{\text{question 3.d)}}{\Leftrightarrow} f(-L) = 0 \Leftrightarrow -L \underset{\text{question 3.c)}}{=} 0 \Leftrightarrow L = 0$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0}$

EXERCICE V (extrait ESSEC 2003)

1. La représentation graphique de U est l'intérieur du triangle suivant :



2. (a) L'ensemble U étant ouvert, un extrémum de h sur U est nécessairement un point critique de h sur U. On calcule donc les deux dérivées partielles d'ordre 1

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{-x-y+1} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{-x-y+1}$$

et si (x,y) est un point critique de h sur U, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{1}{-x-y+1} = 0 \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{-x-y+1} = 0 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{1}{-x-y+1} = 0 \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{y} = \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{-x-y+1} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = y \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{-2x+1} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = y \\ \frac{(-2x+1)-x}{x(-2x+1)} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = y \\ (-2x+1)-x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = y \\ -3x+1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{ x = y = \frac{1}{3} x = y \right.$$

Puisque $(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \in U$, on vient de montrer que $\boxed{(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \text{ est l'unique extrémum possible de } h \text{ sur } U}$.

(b) Pour savoir s'il s'agit bien d'un extrémum local, nous allons calculer le $rt - s^2$ au point $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

$$\begin{aligned}
r(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})\right](x,y) = -\frac{1}{x^2} - \left(-\frac{-1}{(-x-y+1)^2}\right) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(-x-y+1)^2} \\
t(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left[\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})\right](x,y) = -\left(-\frac{-1}{(-x-y+1)^2}\right) = -\frac{1}{(-x-y+1)^2} \\
s(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})\right](x,y) = -\left(-\frac{-1}{(-x-y+1)^2}\right) = -\frac{1}{(-x-y+1)^2} \\
r(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) &= -\frac{1}{(\frac{1}{3})^2} - \frac{1}{(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+1)^2} = -9-9 = -18 \\
t(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) &= -\frac{1}{(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+1)^2} = -9 \\
s(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) &= -\frac{1}{(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+1)^2} = -9
\end{aligned}$$

et l'on a alors $(rt-s^2)(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = (-18)(-9)-(-9)^2 = 81 > 0$ donc $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ est un extrémum local pour h. Puisque $r(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) < 0$,

$$\boxed{\text{le point } (\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \text{ est un maximum local pour la fonction } h \text{ sur } U.}$$