correction de l'exercice 1

On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^k = \dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$

Initialisation $n=1$: $(\mathcal{P}_1)$: $\sum\limits_{k=1}^{1} kx^k = \dfrac{1x^{1+2}-(1+1)x^{1+1}+x}{(1-x)^2}$. On a

- $\sum\limits_{k=1}^{1} kx^k = 1\times x^1 = x$
- $\dfrac{1x^{1+2}-(1+1)x^{1+1}+x}{(1-x)^2} = \dfrac{x^3-2x^2+x}{(1-x)^2} = \dfrac{x(x^2-2x+1)}{(1-x)^2} = \dfrac{x(x-1)^2}{(1-x)^2} \underset{a^2=(-a)^2}{=} \dfrac{x(1-x)^2}{(1-x)^2} = x$

ce qui nous permet d'affirmer que $\sum\limits_{k=1}^{1} kx^k = \dfrac{1x^{1+2}-(1+1)x^{1+1}+x}{(1-x)^2}$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie, montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$$

et montrons que

$$\sum_{k=1}^{n+1} kx^k = \frac{(n+1)x^{(n+1)+2}-((n+1)+1)x^{(n+1)+1}+x}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{(n+1)x^{n+3}-(n+2)x^{n+2}+x}{(1-x)^2}$$

Pour cela, on utilise la relation de Chasles

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} kx^k &= \sum_{k=1}^{n} kx^k + (n+1)x^{n+1} \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2} + (n+1)x^{n+1}\\
&= \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x+(n+1)x^{n+1}(1-x)^2}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x+(n+1)x^{n+1}(1-2x+x^2)}{(1-x)^2}\\
&= \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x+(n+1)x^{n+1}-(2n+2)x^{n+2}+(n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}\\
&= \frac{(n+1)x^{n+3}+(n-2n-2)x^{n+2}+x}{(1-x)^2} = \frac{(n+1)x^{n+3}+(-n-2)x^{n+2}+x}{(1-x)^2} = \frac{(n+1)x^{n+3}-(n+2)x^{n+2}+x}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \geqslant 1,\quad (\mathcal{P}_n)$ est vraie, c'est-à-dire que $\forall n \geqslant 1,\quad \sum\limits_{k=1}^{n} kx^k = \dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$

correction de l'exercice 2

1. Soit $n \geqslant 1$, en remarquant que les trois entiers $(n+1)^2, n, n+1$ sont positifs, on a

   $$\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \underset{\text{produit en croix}}{\Leftrightarrow} n(n+1) \leqslant (n+1)^2 \Leftrightarrow n \leqslant n+1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 1$$

   ce qui est vrai donc $\forall n \geqslant 1,\quad \dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

2. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: $S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$.

   Initialisation $n=1$: $(\mathcal{P}_1)$: $S_1 \leqslant 2 - \dfrac{1}{1} = 1$. On a $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{1} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{1^2} = 1 \leqslant 1$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

   Hérédité : supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire supposons que $S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$ et montrons que $S_{n+1} \leqslant 2 - \dfrac{1}{n+1}$.
   En utilisant la relation de Chasles, on a

   $$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \underset{(\mathcal{P}_n)}{\leqslant} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \underset{\text{question 1}}{\leqslant} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

   donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

   Conclusion : $\forall n \geqslant 1,\quad (\mathcal{P}_n)$ est vraie, c'est-à-dire que $\forall n \geqslant 1,\quad S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$.

3. Puisque $\forall n \geqslant 1, \quad S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$, on en déduit que la suite $(S_n)_n$ est majorée par 2.
Pour montrer qu'elle converge, il suffit de montrer qu'elle est croissante. Pour cela, on étudie le signe de $S_{n+1} - S_n$ et en utilisant la relation de Chasles, on a

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$$

donc la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante et puisqu'elle est majorée, on en déduit qu'elle converge.

correction de l'exercice 3

1. (a) $f'(x) = e^{-x} \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   (b) On introduit la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$ et étudions ses variations sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = f'(x) - 1 = e^{-x} - 1 \leqslant 0$$

ce qui nous fourni le tableau de variations de g

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

donc la fonction g est positive sur $\mathbb{R}_+$ et elle s'annule si et seulement si $x = 0$, ce qui démontre que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) \leqslant x \quad \text{et} \quad f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$$

2. (a) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : 0 < u_n \leqslant 1$
Initialisation $n = 0$: $(\mathcal{P}_0) : 0 < u_0 < 1$ or $u_0 = 1$ et l'on a bien $0 < 1 \leqslant 1$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire que supposons que $0 < u_n \leqslant 1$ et montrons que $0 < u_{n+1} \leqslant 1$. On a

$$0 < u_n \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant -u_n < 0 \Leftrightarrow e^{-1} \leqslant e^{-u_n} < e^0 \Leftrightarrow \underbrace{1 - e^{-1}}_{0 < 1 - e^{-1}} \leqslant \underbrace{1 - e^{-u_n}}_{= u_{n+1}} < 1 \Rightarrow 0 < u_{n+1} \leqslant 1$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.
Conclusion : $\forall n \geqslant 0, \quad (\mathcal{P}_n)$ est vraie c'est-à-dire $\forall n \geqslant 0, \quad 0 < u_n \leqslant 1$.

   (b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. La question 1) montre que $\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \leqslant x \Leftrightarrow f(x) - x \leqslant 0$ et $u_n \geqslant 0$ donc $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leqslant 0$, ce qui montre que la suite u est décroissante.

   (c) La suite u est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. Si l'on note L sa limite, on a

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = 1 - e^{-u_n},$$

et puisque

$$u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} L, \quad 1 - e^{-u_n} \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} 1 - e^{-L},$$

on en déduit l'égalité suivante :

$$L = 1 - e^{-L} \Leftrightarrow L = f(L).$$

Or on sait que la suite u est positive donc sa limite L est positive. La question 1.b) montre que l'unique solution positive à $x = f(x)$ est $x = 0$. Par conséquent, $L = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

correction de l'exercice 4

1. Preuve que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n > 0$ On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n > 0$.
Initialisation $n = 0$: $(\mathcal{P}_0) : u_0 > 0$. Puisque $u_0 = c > 0$ d'après l'énoncé, on en déduit que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$. Puisque $u_n > 0$, on en déduit que $u_n + 3 > 0 + 3 = 3 > 0$ et que $3u_n + 1 > 3 \times 0 + 1 = 1 > 0$.
Ensuite, le quotient de deux réels strictement positifs étant un réel strictement positif, on est en droit d'affirmer que $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{3u_n + 1} > 0$ donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \geqslant 0, \quad (\mathcal{P}_n)$ est vraie, c'est-à-dire que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n > 0$.
Détermination des limites possibles la suite u : On suppose que u converge et l'on note L sa limite. Puisque l'on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n+3}{3u_n+1}, \quad \frac{u_n+3}{3u_n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{L+3}{3L+1}, \quad u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} L,$$

on en déduit que

$$L = \frac{L+3}{3L+1} \Leftrightarrow (3L+1)L = L+3 \Leftrightarrow 3L^2 = 3L \Leftrightarrow L^2 - L = 0 \Leftrightarrow L(L-1) = 0 \Leftrightarrow L = 0 \text{ ou } L = 1$$

Les valeurs 0 et 1 n'étant pas interdites dans l'équation $L = \dfrac{L+3}{3L+1}$, on en déduit que les limites possibles de L sont 0 ou 1.

2. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n = \dfrac{v_n}{w_n}$.
Initialisation $n = 0$: $(\mathcal{P}_0) : u_0 = \dfrac{v_0}{w_0}$. On a $u_0 = c$ et $\dfrac{v_0}{w_0} = \dfrac{c}{1} = c$ donc $u_0 = \dfrac{v_0}{w_0}$, ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire supposons que $u_n = \dfrac{v_n}{w_n}$ et montrons que $u_{n+1} = \dfrac{v_{n+1}}{w_{n+1}}$. La définition des suites u, v et w nous montre que

$$u_{n+1} = \frac{u_n+3}{3u_n+1} \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} \frac{\frac{v_n}{w_n}+3}{3\frac{v_n}{w_n}+1} = \frac{\frac{v_n+3w_n}{w_n}}{\frac{3v_n+w_n}{w_n}} = \frac{\overbrace{v_n+3w_n}^{=v_{n+1}}}{w_n} \times \frac{w_n}{\underbrace{3v_n+w_n}_{=w_{n+1}}} = \frac{v_{n+1}}{w_{n+1}}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.
Conclusion : $\forall n \geqslant 0, \quad (\mathcal{P}_n)$ est vraie, c'est-à-dire que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \dfrac{v_n}{w_n}$.

3. (a) En utilisant les définitions des suites t, z, v, w, on a

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= v_{n+1} + w_{n+1} = (v_n + 3w_n) + (3v_n + w_n) = 4v_n + 4w_n = 4(v_n + w_n) = 4t_n \\ z_{n+1} &= v_{n+1} - w_{n+1} = (v_n + 3w_n) - (3v_n + w_n) = -2v_n + 2w_n = -2(v_n - w_n) = -2z_n \end{aligned}$$

donc la suite t est une suite géométrique de raison 4 et z est une suite géométrique de raisons -2.

(b) La caractérisation des suites géométriques nous montre que

$$\begin{aligned} \forall n &\geqslant 0, \quad t_n = 4^n t_0 = 4^n(v_0 + w_0) = 4^n(c+1) \\ \forall n &\geqslant 0, \quad z_n = (-2)^n z_0 = (-2)^n(v_0 - w_0) = (-2)^n(c-1) \end{aligned}$$

Autrement dit, en utilisant la définition des suites t et z, on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_n + w_n &=& 4^n(c+1) \\ v_n - w_n &=& (-2)^n(c-1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} 2v_n &=& 4^n(c+1) + (-2)^n(c-1) & L_1 + L_2 \\ 2w_n &=& 4^n(c+1) - (-2)^n(c-1) & L_1 - L_2 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} v_n &=& \frac{1}{2}\left[4^n(c+1) + (-2)^n(c-1)\right] \\ w_n &=& \frac{1}{2}\left[4^n(c+1) - (-2)^n(c-1)\right] \end{array} \right.$$

4. Les questions 2) et 3.b) montrent que $\forall n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\frac{1}{2}\left[4^n(c+1) + (-2)^n(c-1)\right]}{\frac{1}{2}\left[4^n(c+1) - (-2)^n(c-1)\right]} = \frac{4^n(c+1) + (-2)^n(c-1)}{4^n(c+1) - (-2)^n(c-1)} = \frac{4^n\left[(c+1) + \frac{(-2)^n}{4^n}(c-1)\right]}{4^n\left[(c+1) - \frac{(-2)^n}{4^n}(c-1)\right]} \\ &= \frac{(c+1) + (\frac{-2}{4})^n(c-1)}{(c+1) - (\frac{-2}{4})^n(c-1)} = \frac{(c+1) + (-\frac{1}{2})^n(c-1)}{(c+1) - (-\frac{1}{2})^n(c-1)} \end{aligned}$$

5. Puisque $-\frac{1}{2} \in]-1,1[$, la suite $(-\frac{1}{2})^n$ tend vers 0 et la question 4) nous montre alors que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{c+1}{c+1} = 1.$$

correction de l'exercice 5

1. Supposons que la suite u converge. On note L sa limite. Puisque l'on a

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(a - u_n^2), \quad u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} L, \quad u_n + \frac{1}{2}(a-u_n^2) \to L + \frac{1}{2}(a - L^2),$$

on en déduit que

$$L = L + \frac{1}{2}(a - L^2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a - L^2) = 0 \Leftrightarrow L^2 = a \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{a},$$

c'est-à-dire que les limites possibles de u sont $-\sqrt{a}$ ou $\sqrt{a}$.

2. La relation de récurrence que satisfait u nous donne

$$\begin{aligned}\sqrt{a} - u_{n+1} &= \sqrt{a} - (u_n + \frac{1}{2}(a-u_n^2)) = \sqrt{a} - u_n - \frac{1}{2}(a - u_n^2) = \sqrt{a} - u_n - \frac{1}{2}(\sqrt{a}-u_n)(\sqrt{a}+u_n) \\ &= (\sqrt{a}-u_n)\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{a}+u_n)\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{a}-u_n)\left(2 - \sqrt{a} - u_n\right)\end{aligned}$$

3. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : 0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{a}$.
Initialisation : $(\mathcal{P}_0) : 0 \leqslant u_0 \leqslant \sqrt{a}$ et puisque $u_0 = 0$, on en déduit que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie, montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{a}$, montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{a}$.
Puisque $0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{a}$, en élevant au carré, on obtient que $0 \leqslant u_n^2 \leqslant a \Rightarrow a^2 - u_n \geqslant 0$ donc

$$u_{n+1} = \underbrace{u_n}_{\geqslant 0} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geqslant 0}\underbrace{(a-u_n^2)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

Ensuite, en utilisant la relation obtenue à la question 2), on a

$$\sqrt{a} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(\underbrace{\sqrt{a}-u_n}_{\geqslant 0 \text{ d'après } (\mathcal{P}_n)})\left(2 - \sqrt{a} - u_n\right)$$

et comme

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant u_n \leqslant \sqrt{a} \Leftrightarrow -\sqrt{a} \leqslant -u_n \leqslant 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{a} - \sqrt{a} \leqslant 2 - \sqrt{a} - u_n \leqslant 2 - \sqrt{a} \\ &\Rightarrow 2 - 2\sqrt{a} \leqslant 2 - \sqrt{a} - u_n \Leftrightarrow 2(\underbrace{1-\sqrt{a}}_{\geqslant 0 \text{ d'après l'énoncé}}) \leqslant 2 - \sqrt{a} - u_n\end{aligned}$$

donc $2 - \sqrt{a} - u_n \geqslant 0$. Par conséquent, $\sqrt{a} - u_{n+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant \sqrt{a}$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$.
Conclusion : $\forall n \geqslant 0, \quad (\mathcal{P}_n)$ est vraie, c'est-à-dire que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{a}$.

4. La question 3) nous montre que $u_{n+1} \leqslant \sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{a} - u_{n+1} \geqslant 0$. Pour l'autre inégalité, on utilise la question 2)

$$\sqrt{a} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{a}-u_n)\left(2 - \sqrt{a} - u_n\right)$$

et comme nous avons vu dans cette question que

$$2 - \sqrt{a} - u_n \leqslant 2 - \sqrt{a},$$

on en déduit que

$$\sqrt{a} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(\sqrt{a}-u_n)\left(2-\sqrt{a}\right) = (\sqrt{a}-u_n)\left(1 - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)$$

Par conséquent, on a bien montré que

$$\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \sqrt{a} - u_{n+1} \leqslant \left(1 - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)(\sqrt{a}-u_n)$$

5. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : 0 \leqslant \sqrt{a} - u_n \leqslant \sqrt{a}\left(1 - \dfrac{\sqrt{a}}{2}\right)^n$.

   Intialisation : $(\mathcal{P}_0) : 0 \leqslant \sqrt{a} - u_0 \leqslant \sqrt{a}\left(1 - \dfrac{\sqrt{a}}{2}\right)^0$. Or on a

$$\sqrt{a} - u_0 = \sqrt{a} - 0 = \sqrt{a} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{a}\left(1 - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)^0 = \sqrt{a}$$

   donc on a bien $0 \leqslant \sqrt{a} - u_0 \leqslant \sqrt{a}\left(1 - \dfrac{\sqrt{a}}{2}\right)^0$ et $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

   Hérédité : supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire supposons que

$$0 \leqslant \sqrt{a} - u_n \leqslant \sqrt{a}\left(1 - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)^n$$

   et montrons que

$$0 \leqslant \sqrt{a} - u_{n+1} \leqslant \sqrt{a}\left(1 - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)^{n+1}$$

   Cela découle simplement de la question 4) et l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leqslant \sqrt{a} - u_{n+1} \leqslant \left(1 - \dfrac{\sqrt{a}}{2}\right)(\sqrt{a} - u_n) \\ 0 \leqslant \sqrt{a} - u_n \leqslant \sqrt{a}\left(1 - \dfrac{\sqrt{a}}{2}\right)^n \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{a} - u_{n+1} \leqslant \left(1 - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)\sqrt{a}\left(1 - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)^n = \sqrt{a}\left(1 - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)^{n+1}$$

   donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

   Conclusion : $\forall n \geqslant 0, \quad (\mathcal{P}_n)$ est vraie, c'est-à-dire que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \sqrt{a} - u_n \leqslant \sqrt{a}\left(1 - \dfrac{\sqrt{a}}{2}\right)^n$

6. Puisque $0 < a < 1$, on obtient que

$$0 < \sqrt{a} < 1 \Leftrightarrow -1 < -\sqrt{a} < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{a}}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 1 - \frac{\sqrt{a}}{2} < 1$$

   donc $1 - \dfrac{\sqrt{a}}{2} \in]-1, 1[$ et la suite géométrique $\sqrt{a}\left(1 - \dfrac{\sqrt{a}}{2}\right)^n$ converge vers 0. L'encadrement démontrer dans la question 5) nous permet alors d'appliquer le théorème d'encadrement donc

$$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{a} - u_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{a}$$

correction de l'exercice 6

1. (a) Le tirage de 4 boules se représente par une 4-liste (x_1, x_2, x_3, x_4), où x_i désigne la boule obtenue au $i^{ième}$ prélèvement donc chaque x_i a 4 possibilités. Les x_i ne peuvent être identiques ($x_1 = x_2$ signifie que la seconde boule est identique à la première, ce qui n'est pas possible, même si leurs couleurs respectives sont identiques, les boules sont physiquement distinctes). L'ordre intervient clairement donc l'ensemble des tirages possibles correspond à l'ensemble des 4-listes d'un ensemble à 4 élémentsPour piocher successivement 4 boules parmi 4 boules, il y a $A_4^4 = 4! = 24$ possibilités.

   (b) On note A_k : "obtenir la dernière boule blanche au $k^{ième}$ prélèvement "

   i. A_1 se réalise si et seulement la première boule est blanche (1 seul choix pour celle-ci), puis les 3 boules suivantes (qui sont les noires restantes) ont respectivement 3,2 et 1 possibilités, ce qui nous donne

$$P(A_1) = \frac{1 \times 3 \times 2 \times 1}{A_4^4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

   ii. A_2 se réalise si et seulement la première boule est noire (elle a 3 possibilités), la seconde est blanche (1 seul choix pour celle-ci), puis les 2 boules suivantes (qui sont les noires restantes) ont respectivement 2 et 1 possibilités, ce qui nous donne

$$P(A_1) = \frac{3 \times 1 \times 2 \times 1}{A_4^4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

iii. A_3 se réalise si et seulement les deux premières boules sont noires (3 possibilités pour la première et 2 pour la suivante), la troisème est blanche (1 seul choix pour celle-ci), puis la dernière (qui est la noire restante) a 1 seule possibilité, ce qui nous donne

$$P(A_1) = \frac{3 \times 2 \times 1 \times 1}{A_4^4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

iv. A_4 se réalise si et seulement les trois premières boules sont noires (3 possibilités pour la première, 2 pour la deuxième, 1 pour la dernière), la quatrième est blanche (1 seul choix pour celle-ci), ce qui nous donne

$$P(A_1) = \frac{3 \times 2 \times 1 \times 1}{A_4^4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

2. Comme précédemment, il y a 24 possibilités de tirages. On note
   - A_k : "obtenir la dernière boule blanche au $k^{ième}$ prélèvement "
   - B_k "obtienir une boule noire au $k^{ième}$ prélèvement "
   - N_k "obtenir une boule blanche au $k^{ième}$ prélèvement "

   (a) Il est aisé de vérifier que $A_2 = (B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4)$, ce qui nous donne

   $$P(A_3) = P(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4) = \frac{2 \times 1 \times 2 \times 1}{24} = \frac{1}{6}$$

   (b) Il est aisé de vérifier que

   $$A_3 = (B_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap N_4) \cup (N_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap N_4),$$

   cette union étant clairement disjointe, on a

   $$P(A_3) = P(B_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap N_4) + P(N_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap N_4) = \frac{2 \times 2 \times 1 \times 1}{24} + \frac{2 \times 1 \times 2 \times 1}{24} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

   (c) Il est aisé de vérifier que

   $$A_4 = (B_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap B_4) \cup (N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap B_4) \cup (N_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap B_4),$$

   cette union étant clairement disjointe, on a

   $$\begin{aligned} P(A_3) &= P(B_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap B_4) + P(N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap B_4) + P(N_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap B_4) \\ &= \frac{2 \times 2 \times 1 \times 1}{24} + \frac{2 \times 2 \times 1 \times 1}{24} + \frac{2 \times 1 \times 2 \times 1}{24} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Il existe $A_n^n = n!$ tirages possibles. Avec les notations du 2, on a

   $$A_k = (N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k \cap N_{k+1} \cap \cdots N_N),$$

   ce qui nous donne

   $$P(A_k) = P(N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k \cap N_{k+1} \cap \cdots N_N) = \frac{\overbrace{(N-1) \times (N-2) \times \cdots \times 1}^{\text{les boules noires}} \times 1}{N!} = \frac{(N-1)!}{N \times (N-1)!} = \frac{1}{N}$$

   Remarque : on retrouve le cas $N = 4$ car

   $$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4}$$

4. Il y a $A_N^N = N!$ tirages possibles. Avec les notations du 2, puisque le $k^{ième}$ tirage donne nécessairement une boule blanche et que l'autre boule blanche apparait au $1^{er}, 2^{nd}, ..., (k-1)^{ième}$ tirage, on a

   $$\begin{aligned} A_k &= (B_1 \cap N_2 \cap \cdots N_{k-1} \cap B_k \cap N_{k+1} \cap \cdots \cap N_N) \cup (N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k \cap N_{k+1} \cap \cdots \cap N_N) \\ & \cup \cdots \cup (N_1 \cap \cdots \cap N_{k-2} \cap B_{k-1} \cap B_k \cap N_{k+1} \cap \cdots \cap N_N), \end{aligned}$$

   cette réunion étant disjointe, on peut donc écrire

   $$\begin{aligned} P(A_k) &= P(B_1 \cap N_2 \cap \cdots N_{k-1} \cap B_k \cap N_{k+1} \cap \cdots \cap N_N) + P(N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k \cap N_{k+1} \cap \cdots \cap N_N) \\ & + \cdots + P(N_1 \cap \cdots \cap N_{k-2} \cap B_{k-1} \cap B_k \cap N_{k+1} \cap \cdots \cap N_N) \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que

$$\begin{aligned}
P(B_1\cap B_2\cap N_3\cap\cdots\cap N_N) &= P(N_1\cap B_2\cap N_3\cap\cdots\cap N_{k-1}\cap B_k\cap N_{k+1}\cap\cdots\cap N_N)\\
&= (N_1\cap\cdots\cap N_{k-2}\cap B_{k-1}\cap B_k\cap N_{k+1}\cap\cdots\cap N_N)\\
&= \frac{\overbrace{(N-2)\times(N-3)\times\cdots\times 2}^{\text{les boules noires}}\times\overbrace{2\times 1}^{\text{les boules blanches}}}{N!}\\
&= \frac{2!\times(N-2)!}{N\times(N-1)\times(N-2)!}=\frac{2}{N(N-1)}
\end{aligned}$$

Puisque $P(A_k)$ est la somme de $k-1$ probabilités identiques, on en déduit que

$$P(A_k)=\frac{2}{N(N-1)}(k-1)=\frac{2(k-1)}{N(N-1)}$$

Remarque : si $N=4$, on réobtient que

$$P(A_2)=\frac{2(2-1)}{4\times 3}=\frac{1}{6},\quad P(A_3)=\frac{2(3-1)}{4\times 3}=\frac{1}{3},\quad P(A_4)=\frac{2(4-1)}{4\times 3}=\frac{1}{2}$$

correction de l'exercice 7

1. Soit v la suite définie par $\forall n\geqslant 0,\quad v_n=\alpha\, n+\beta$. Elle vérifie l'égalité (E) si et seulement si

$$\begin{aligned}
\forall n &\geqslant 0,\quad (a+b)(\alpha(n+1)+\beta)=(a+b-1)(\alpha n+\beta)+b+n\\
&\Leftrightarrow\ \forall n\geqslant 0,\quad n\alpha\,(a+b)+(a+b)\,(\alpha+\beta)=n\,(\alpha\,(a+b-1)+1)+\beta\,(a+b-1)+b
\end{aligned}$$

En utilisant le principe d'identification, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcl}\alpha\,(a+b) &=& \alpha\,(a+b-1)+1\\ (a+b)\,(\alpha+\beta) &=& \beta\,(a+b-1)+b\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\alpha(a+b-(a+b-1) &=& 1\\ (a+b)\alpha+(a+b-(a+b-1))\beta &=& b\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\alpha &=& 1\\ (a+b)+\beta &=& b\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\alpha &=& 1\\ \beta &=& -a\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la suite v est définie par $\forall n\geqslant 0,\quad v_n=n-a$.

2. (a) Par construction, on a

$$\forall n\geqslant 0,\quad y_n=x_n-(n-a)\Leftrightarrow x_n=y_n+n-a\quad\text{et}\quad x_{n+1}=\frac{a+b-1}{a+b}x_n+\frac{b}{a+b}+\frac{n}{a+b}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= x_{n+1}-((n+1)-a)=\frac{a+b-1}{a+b}x_n+\frac{b}{a+b}+\frac{n}{a+b}-n-1+a\\
&= \frac{a+b-1}{a+b}(y_n+n-a)+\frac{b}{a+b}+\frac{n}{a+b}-n-1+a\\
&= \frac{a+b-1}{a+b}y_n+\frac{a+b-1}{a+b}n-\frac{a^2+ab-a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{n}{a+b}-n-1+a\\
&= \frac{a+b-1}{a+b}y_n+\left(\frac{a+b-1}{a+b}+\frac{1}{a+b}-1\right)n-\frac{a^2+ab-a}{a+b}+\frac{b}{a+b}-\frac{a+b}{a+b}+\frac{a^2+ab}{a+b}\\
&= \frac{a+b-1}{a+b}y_n+\left(\frac{a+b-1+1-a-b}{a+b}\right)n+\frac{-a^2-ab+a+b-a-b+a^2+ab}{a+b}\\
&= \frac{a+b-1}{a+b}y_n
\end{aligned}$$

La suite y est donc bien géométrique de raison $\dfrac{a+b-1}{a+b}$ donc

$$\forall n\geqslant 0,\quad y_n=\left(\frac{a+b-1}{a+b}\right)^n y_0=\left(\frac{a+b-1}{a+b}\right)^n(x_0-(0-a))=\left(\frac{a+b-1}{a+b}\right)^n(x_0+a)$$

(b) $x_n=y_n+n-a=\left(\dfrac{a+b-1}{a+b}\right)^n(x_0+a)+n-a$

(c) D'une part, $\dfrac{a+b-1}{a+b}\in]0,1[\subset]-1,1[$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a+b-1}{a+b}\right)^n(x_0+a)=0$ et d'autre part, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n-a)=+\infty$, on obtient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$.