Exercice 1

a) faux b) vrai c) faux d) faux e) vrai f) faux
g) faux h) vrai i) faux j) vrai k) faux l) faux

Exercice 2

(E_1) : les valeurs interdites sont $\{-2,-1,0\}$. D'autre part, en remarquant que le dénominateur commun aux trois fractions est $x(x+1)(x+2)$, on a

$$(E_1) \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}-\frac{2x-2}{x+2}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x+1)+(x+1)^2(x+2)-x(2x-2)(x+1)}{x(x+1)(x+2)}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1)+(x+1)^2(x+2)-x(2x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow 5x^2+7x+2=0 \Leftrightarrow x\in\{-1,-\frac{2}{5}\}$$

Aucune valeur interdite étant solution, on en déduit que les seules solutions de (E_1) sont -1 et $-\frac{2}{5}$

(E_2) : les valeurs interdites sont $e^x=1 \Leftrightarrow x=0$ et $e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$ (e^x ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}$). Comme l'énoncé nous le propose, on pose $X=-e^x$ donc

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{e^x-1}+\frac{e^x-1}{e^x} &= \frac{2e^x+2}{e^x-2} \Leftrightarrow \frac{-X}{-X-1}+\frac{-X-1}{-X}=\frac{-2X+2}{-X-2}\\ &\Leftrightarrow \frac{X}{X+1}+\frac{X+1}{X}=\frac{2X-2}{X+2}\end{aligned}$$

Par conséquent, x est solution de (E_2) ssi $X=-e^x$ est solution de (E_1). Par conséquent, nous en déduisons que

$$\left\{\begin{array}{c} X=-1\\ \text{ou}\\ X=-\frac{2}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -e^x=-1\\ \text{ou}\\ -e^x=-\frac{2}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} e^x=1\\ \text{ou}\\ e^x=\frac{2}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0\\ \text{ou}\\ x=\ln\left(\frac{2}{5}\right)\end{array}\right.$$

La valeur $x=0$ étant la seule solution qui soit également une valeur interdite, nous obtenons que (E_2) admet une unique solution $x=\ln\left(\frac{2}{5}\right)$

Exercice 3

1. Le dénominateur commun de l'expression à simplifier est $(x+1)(x^2-x+1)$ donc

$$\begin{aligned}&3x+\frac{14}{x+1}+\frac{22x}{x^2-x+1}-2\\ =\ &\frac{3x(x+1)(x^2-x+1)+14(x^2-x+1)+22x(x+1)-2(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\\ =\ &\frac{3x^4-2x^3+36x^2+11x+12}{(x+1)(x^2-x+1)}\end{aligned}$$

2. Il suffit de développer le membre de gauche de l'égalité souhaitée, de regrouper les mêmes puissances de x puis d'appliquer le principe d'identification

$$(ax^2+bx+c)(3x^2+x+1)=3ax^4+x^3(a+3b)+x^2(a+b+3c)+x(b+c)+c.$$

On en déduit les égalités suivantes

$$[3a=3, a+3b=-2, a+b+3c=36, b+c=11, c=12] \Leftrightarrow [a=1, b=-1, c=12]$$

Nous venons donc de montrer que

$$\left(x^2-x+12\right)(3x^2+x+1)=3x^4-2x^3+36x^2+11x+12$$

3. Comme d'habitude, on explicite en premier lieu les valeurs interdites. Le trinôme x^2-x+1 admet comme discriminant -3 donc il ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et change pas de signe sur $\mathbb{R}$. En outre, son coefficient dominant (celui associé au plus haut degré) étant positif (égal à 1), nous sommes donc assurés que $\forall x\in\mathbb{R},\quad x^2-x+1>0$. Quant au facteur $x-1$, il s'annule uniquement pour $x=-1$. Par conséquent, $x=-1$ est l'unique valeur interdite de (E) et il est aisé d'obtenir les équivalences suivantes

$$(E) \Leftrightarrow 3x+\frac{14}{x+1}+\frac{22x}{x^2-x+1}-2\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x^2-x+12\right)(3x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\leqslant 0$$

Je laisse le soin au lecteur de vérifier que chaque trinôme intervenant au numérateur ne s'annule pas et sur $\mathbb{R}$ et est de signe positif. Le signe de la fraction étant donc celui de $(x+1)$, il est immédiat que

$$(E) \Leftrightarrow \frac{\left(x^2-x+12\right)(3x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\leqslant 0 \Leftrightarrow x<-1$$

Tous les nombres réels strictement moindre que -1 sont les solutions de l'inéquation (E)

Exercice 4

1. On introduit la fonction $f(x)=(x-1)e^x+\frac{x^2e^x}{2}+1$, dont la dérivée est

$$f'(x)=e^x+e^x(x-1)+xe^x++\frac{1}{2}x^2e^x=\frac{xe^x(x+4)}{2}$$

qui est clairement positive sur $[0,+\infty[$. La fonction f est donc croissante et, puisque $f(0)=0$, on en déduit que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}_+,\quad (x-1)e^x+\frac{x^2e^x}{2}+1\geqslant 0$$

2. On pose $g(x) = e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}e^x\right)$ dont la dérivée est

$$g'(x) = e^x - 1 - xe^x - \frac{x^2}{2}e^x = (1-x)e^x - 1 - \frac{x^2}{2}e^x = -f(x)$$

La question précédente montrer que f est positive sur $\mathbb{R}_+$ donc g' est négative sur $\mathbb{R}_+$, ce qui implique que g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $g(0) = 0$, on peut affirmer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}e^x$$

Exercice 5

1. Il s'agit bien entendu d'une suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(1 - 2u_n)$

   Recherche de la constante L : $L = \dfrac{1}{3}(1 - 2L) \Leftrightarrow L = \dfrac{1}{5}$

   On pose $v_n = u_n - \dfrac{1}{5}$ (donc $u_n = v_n + \dfrac{1}{5}$). Nous allons montrer que v est une suite géométrique.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} - \frac{2}{3}\left(v_n + \frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{3}v_n$$

   La suite v étant géométrique de raison $-\dfrac{2}{3}$, on a donc pour tout entier naturel n

$$v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n v_0 \Leftrightarrow u_n - \frac{1}{5} = \left(-\frac{2}{3}\right)^n \left(u_0 - \frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \left(u_0 - \frac{1}{5}\right)$$

2. $u_2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{5} + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 \left(u_0 - \dfrac{1}{5}\right) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{9}u_0 - \dfrac{4}{45} = \dfrac{4}{5} \underset{\times 45}{\Leftrightarrow} 20u_0 - 4 = 36 \Leftrightarrow u_0 = 2$

Exercice 6

1. (a) L'équation admet une unique valeur interdite $x = -\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{2}{2x+1} \Leftrightarrow x - 1 = \frac{2}{2x+1} \Leftrightarrow (2x+1)(x-1) = 2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

   Puisqu'aucune valeur interdite, les solutions de l'équation proposée sont $x = -1$ et $x = \dfrac{3}{2}$.

   (b) On résoud, relativement à la variable a (b étant considéré comme constant) l'équation

$$\begin{aligned} b &= 1 + \frac{2}{2a+1} \Leftrightarrow b - 1 = \frac{2}{(2a+1)} \Leftrightarrow (2a+1)(b-1) = 2 \\ &\Leftrightarrow 2a(b-1) + b - 1 = 2 \Leftrightarrow 2a(b-1) = 3 - b \Leftrightarrow a = \frac{3-b}{2(b-1)} = \frac{3-b}{2b-2} \end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \frac{3}{2}}{u_{n+1} + 1} = \frac{1 + \frac{2}{2u_n+1} - \frac{3}{2}}{1 + \frac{2}{2u_n+1} + 1} = \frac{\frac{4 - (2u_n+1)}{2(2u_n+1)}}{\frac{4 + 2(2u_n+1)}{2u_n+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{4 - (2u_n+1)}{4 + 2(2u_n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3 - 2u_n}{4u_n + 4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3 - 2u_n}{u_n + 1} = -\frac{1}{4}\frac{u_n - \frac{3}{2}}{u_n + 1} = -\frac{1}{4}w_n \end{aligned}$$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n w_0.$

   (c) Puisque $u_0 = 0$, on a $w_0 = \dfrac{u_0 - \frac{3}{2}}{u_0 + 1} = -\dfrac{3}{2}$ et en remplaçant w_n par son expression en fonction de u_n, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{u_n - \frac{3}{2}}{u_n + 1} &= -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \Leftrightarrow u_n - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n (u_n + 1) \\ &\Leftrightarrow u_n - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u_n - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ &\Leftrightarrow u_n\left[1 + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{3}{2}\left[1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] \Leftrightarrow u = \frac{3}{2} \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n} \end{aligned}$$