

*Puisqu'il s'agit d'un concours blanc, dont le but est de simuler le concours, je vous propose le sujet ECRICOME 2004 sur lequel vos camarades de deuxième année ont planché la semaine dernière. Néanmoins, j'ai tronqué un peu le sujet (la dernière partie de l'exercice 3 utilise le cours de deuxième année). Pour compenser, un quatrième exercice, issu de l'ESCP 1994, a été ajouté. Il est plus difficile (mais il reste abordable) que les autres exercices et il ne doit être traité qu'après avoir traité les trois premiers exercices. En fait, il y a moins de questions intermédiaires, donc c'est à vous de donner le cheminement nécessaire pour la résolution des questions, qui sont tout à fait classiques. Bonne chance.*

---

## ECRI COME

### Banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles

esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

## CONCOURS D'ADMISSION

option économique

## MATHÉMATIQUES

Année 2004

**Aucun instrument de calcul n'est autorisé.**

**Aucun document n'est autorisé.**

L'énoncé comporte 6 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

# 1 EXERCICE

Soient  $f$  la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et  $(u_n)$  la suite de nombres réels déterminée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \int_0^1 f(x) dx \\ \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x) dx \end{array} \right.$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la représentation graphique de  $f$ , relativement à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

## 1.1 Etude de $f$ .

1. Montrer que la fonction  $f$  est paire sur  $\mathbb{R}$ .
2. Etudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .
3. Déterminer la limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
4. Montrer que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .
5. Donner l'allure de  $\mathcal{C}_f$ .
6. Montrer que  $f$  réalise une bijection de l'intervalle  $[0, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  à préciser.
7. Pour tout  $y$  de l'intervalle  $]0, 1]$ , déterminer l'unique réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, +\infty[$  tel que :

$$f(x) = y$$

8. Déterminer alors la bijection réciproque  $f^{-1}$

## 1.2 Calcul d'aire

On considère la fonction numérique  $F$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$F(x) = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

Pour tout réel  $\lambda$  strictement positif, on note  $\mathcal{A}(\lambda)$  l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points  $M(x, y)$  tels que :

$$\lambda \leq x \leq 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

ainsi

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x) dx$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

En déduire l'ensemble de définition de  $F$ .

2. Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que  $F$  est impaire sur son ensemble de définition.
4. Déterminer la limite de  $F$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . En déduire la limite de  $F$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .
5. Exprimer  $\mathcal{A}(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$  et calculer la limite de  $\mathcal{A}(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

### 1.3 Etude de la suite $(u_n)$ .

1. Calculer  $u_0$  et  $u_1$ .
2. Effectuer une intégration par parties et calculer  $u_3$ .  
(On pourra remarquer que  $\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ )
3. Déterminer le sens de variations de la suite  $(u_n)$ ..
4. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente. (On ne cherchera pas sa limite dans cette question)
5. Justifier l'encadrement suivant :

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$$

en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

6. Déterminer alors la limite de la suite  $(u_n)$

## 2 EXERCICE

Dans cet exercice, on étudie l'exponentielle d'une matrice pour une matrice carrée d'ordre 3, puis d'ordre 2.

### 2.1 Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient  $A$  et  $P$  les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ .
2. On pose  $T = P A P^{-1}$ .
  - (a) Calculer la matrice  $T$ .
  - (b) Calculer  $T^2$ ,  $T^3$ , puis  $T^n$  pour tout entier naturel  $n \geq 3$ .
3. En déduire que :

$$\forall n \geq 3, \quad A^n = 0$$

où  $0$  désigne la matrice nulle d'ordre 0.

4. Pour tout réel  $t$ , on définit la matrice  $E(t)$  par :

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$

où  $I$  désigne la matrice unité d'ordre 3.

- (a) Montrer que :

$$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t) E(t') = E(t + t')$$

- (b) Pour tout  $t$  réel, calculer  $E(t) E(-t)$ . En déduire que la matrice  $E(t)$  est inversible et déterminer son inverse en fonction de  $I$ ,  $A$ ,  $A^2$ ,  $t$ .
- (c) Pour tout  $t$  réel et pour tout entier naturel  $n$ , déterminer  $[E(t)]^n$  en fonction de  $I$ ,  $A$ ,  $A^2$ ,  $t$  et  $n$ .

## 2.2 Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient  $B$  et  $D$  les matrices définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, et pour tout réel  $t$ , on définit la matrice  $E_n(t)$  par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} B^k \text{ que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les réels  $\lambda$  pour lesquels la matrice  $B - \lambda I_2$  n'est pas inversible.
2. Résoudre les équations  $BX = X$  et  $BX = 2X$  où  $X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ .
3. On pose  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ .
  - (a) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $Q^2 = aQ + bI_2$ .
  - (b) Montrer que  $Q$  est inversible et que

$$Q^{-1}BQ = D.$$

4. Pour tout entier naturel  $n$ , montrer que :

$$B^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$$

exprimer de même  $b_n(t)$ ,  $c_n(t)$ ,  $d_n(t)$  sous le forme d'une somme.

6. Déterminer les limites de  $a_n(t)$ ,  $b_n(t)$ ,  $c_n(t)$ ,  $d_n(t)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
7. Pour tout  $t$  réel, on pose alors :

$$E(t) = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(t) & \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(t) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(t) & \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(t) \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que

$$E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}.$$

- (b) Déterminer les matrices  $E_1$  et  $E_2$ , telles que pour tout  $t$  réel on ait :

$$E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2.$$

- (c) Calculer  $E_1^2$ ,  $E_2^2$ ,  $E_1 E_2$ ,  $E_2 E_1$ .
- (d) En déduire que pour tout  $t$  réel,  $E(t)$  est inversible et déterminer son inverse.

### 3 Exercice

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur  $A$  ou le serveur  $B$ .

On constate que le serveur  $A$  est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur  $B$  est choisi dans 30% des cas. (Ce qui revient à dire que la probabilité pour que le serveur  $A$  soit choisi est de 0.7). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur  $A$  est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur  $B$  est de 0.05.

- (a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.
- (b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur  $A$  ?

2. Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite  $AABBBA\dots$  signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur  $A$ , les jours 3, 4 et 5 il a choisi le serveur  $B$ , et le jour 6 le serveur  $A$ . Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série  $BBAAAB\dots$ ). On note  $L_1$  la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et  $L_2$  la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

Ainsi, pour  $k \geq 1$ , dire que  $L_1 = k$  signifie que pendant les  $k$  premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jour suivant l'autre serveur.

- (a) Justifier soigneusement la formule :

$$\forall k \geq 1 \quad P(L_1 = k) = (0.3)^k (0.7) + (0.7)^k (0.3)$$

- (b) Vérifier par le calcul que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p(L_1 = k) = 1$$

- (c) Déterminer l'espérance mathématique de  $L_1$ .
  - (d) Déterminer la loi du couple aléatoire  $(L_1, L_2)$ .
  - (e) En déduire la loi de  $L_2$
3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . A partir d'un jour donné, que l'on appellera le jour 1, on note :  $N_n$  la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'ordinateur choisit le serveur  $A$  pendant les  $n$  premiers jours,  $T_1$  le numéro du jour où pour la première fois le serveur  $A$  est choisi et  $T_2$  le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur  $A$  est choisi.

- (a) Déterminer la loi de  $N_n$ , son espérance mathématique et sa variance.
- (b) Déterminer la loi de  $T_1$ , son espérance mathématique et sa variance.
- (c) Montrer que

$$\forall k \geq 2, \quad P(T_2 = k) = (k-1)(0.7)^2(0.3)^{k-2}$$

## 4 Exercice (extrait ESCP 1994)

On considère l'application  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x + 8)$$

ainsi que l'application  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 8$$

On donne également les approximations numériques suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\sqrt{3} &\simeq 0.58, & f(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}) &\simeq 1.40, & f(1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}) &\simeq 1.27 \\ \frac{1}{3}\sqrt{21} &\simeq 1.53, & g(1 - \frac{1}{3}\sqrt{21}) &\simeq 9.13, & g(1 + \frac{1}{3}\sqrt{21}) &\simeq -5.13 \end{aligned}$$

1.

- (a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet trois solutions dans  $\mathbb{R}$ .
- (b) On note  $x_1, x_2, x_3$  avec  $x_1 < x_2 < x_3$  les trois racines de  $g$ . Justifier que que

$$1 < x_2 < 2.$$

2. Etude de  $f$ .

- (a) Montrer que  $f(x_2) = x_2$ .
- (b) Montrer que le segment  $[1, 2]$  est stable par  $f$  (c'est-à-dire que  $f([1, 2]) \subset [1, 2]$ ).
- (c) Donner un encadrement de  $f'(x)$  lorsque  $x \in [1, 2]$ .
- (d) Montrer que, pour tout  $x$  de  $[1, 2]$ ,  $|f(x) - f(x_2)| \leq \frac{1}{3}|x - x_2|$ .

3. Soit  $u_0 = 1$  et pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n = f(u_{n-1})$ .  
Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $x_2$ .