La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 3 pages, de trois exercices indépendants et d'un problème qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules rouges. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire successivement et **sans remise** 3 boules dans l'urne.
On note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage.
Ensuite, on replace dans l'urne toutes les boules blanches obtenues. On doit alors piocher dans l'urne, **avec remise**, autant de boules que le nombre de boules blanches obtenues au premier tirage.
On note Y le nombre de boules blanches obtenues au cours du second tirage.
Par exemple, si lors du premier tirage on tire 2 boules rouges et 1 blanche, on repose dans l'urne la boule blanche (l'urne contient alors 2 boules rouges et 2 boules blanches). On pioche alors 1 boule dans l'urne. Si cette boule est rouge alors $X = 2$ et $Y = 0$.

1. Donner la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.
2. Donner la loi conjointe du couple (X, Y).
3. Expliciter la loi de Y ainsi que son espérance.
4. Donner la loi de la variable aléatoire finie $Z = |Y - X|$

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on considère la fonction f_n, définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = x + x^2 + ... + x^n$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0, 1]$, que l'on notera u_n.
2. En remarquant que $f_{n+1}(x) = x^{n+1} + f_n(x)$, étudier le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis donner la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
4. Calcul de la limite.
   (a) Montrer que $f_n(x) = \dfrac{x - x^{n+1}}{1 - x}$ pour $x \neq 1$.
   (b) Calculer u_2. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^{n+1}$ $\quad(\sqrt{5} \simeq 2.23)$
   (c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 3

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.
On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec $c \geqslant 1$ boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).
On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.
6. Soit $p \leqslant n-1$.
   (a) Déterminer $P(X_{p+1} = 1 / Z_p = k)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
   $$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}.$$
   (c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   (On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1, X_2, ..., X_p étant supposées suivre une loi de de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).

Problème

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

On s'intéresse dans cet exercice à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Etude de la fonction f.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction sh, en déduire le signe de $\operatorname{sh}(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$ et montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^\times$.
3. Démontrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$.
4. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \operatorname{sh} x - x \operatorname{ch}(x)$.
   Etudier les variations de h, puis en déduire le signe de $h(x)$.
5. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$ et donner l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

2. Etude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On donne : $f(0.8) \simeq 0.9, \quad f(1) \simeq 0.85$.

1. Justifier que $f([0.8, 1]) \subset [0.8, 1]$, puis que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0.8, 1]$
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ puis que $\alpha \in [0.8, 1]$.
3. Justifier, en utilisant les questions **1.**1 et **1.**4, que :
   $$\forall x \in [0.8, 1], \quad \frac{h(1)}{\operatorname{sh}^2(0.8)} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{h(0.8)}{\operatorname{sh}^2(1)}$$
   (on utilisera également que $a \leqslant b \leqslant 0$ et $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $ad \leqslant bc$: on se convaincra avec $a = -4$, $b = -2$, $c = 2$ et $d = 5$)
4. On donne :
   $$\frac{h(1)}{\operatorname{sh}^2(0.8)} \simeq - - 0.47 \text{ et } \frac{h(0.8)}{\operatorname{sh}^2(1)} \simeq -0.13.$$
   Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0.5\, |u_n - \alpha|$$
   puis que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant 0.2\, (0.5)^n.$$
5. En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.