La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 4 pages, de deux exercices indépendants et d'un problème qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1

Soient a, b, c trois reels tous non nuls, et M la matrice carrée d'ordre 3 suivante : $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 0 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 0 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $M^2 = 2I_3 + M$. La matrice M est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
2. On note :

$$P = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & -\frac{2}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{2}{c} \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer PQ. Montrer que P est inversible. Quel est son inverse ?

   (b) Vérifier : $M = PDP^{-1}$

3. Déterminer l'ensemble des matrices Y de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $DY - YD = 3Y$.
4. Soit X une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $X' = P^{-1}XP$.

   (a) Montrer que la matrice X vérifie l'équation $MX - XM = 3X$ ssi la matrice X' vérifie l'équation $DX' - X'D = 3X'$.

   (b) En déduire toutes les matrices X solutions de l'équation $MX - XM = 3X$.

Exercice 2

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où $x,\ y$ et z sont des nombres réels.

On définit alors une suite de matrices colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_0 \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + B \end{cases}$$

On pose pour finir

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer tous les réels λ tels que la matrice $A - \lambda I_3$ soit inversible.
2. Justifier qu'il existe un unique triplet (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$B = \alpha U + \beta V + \gamma W$$

3. Calculer AU (resp. AV, resp. AW) en fonction de U (resp. V, resp. W)
4. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$X_n = \alpha_n U + \beta_n V + \gamma_n W$$

5. Etablir par récurrence que

$$n \in \mathbb{N}^\times \quad \begin{cases} \alpha_n = \alpha \\ \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\beta_0 - 2\beta) + 2\beta \\ \gamma_n = \gamma_0 + n\gamma \end{cases}$$

Problème

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1, et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettre a, b ou c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c.
A la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante :

- si la lettre a est tirée, on change le jeton A de case,
- si la lettre b est tirée, on change le jeton B de case,
- si la lettre c est tirée, on ne change pas le placement des jetons.

Soit n un entier positif. On définit la variable aléatoire discrète X_n décrivant les positions de A en posant :

- si $n = 0$, $X_0 = 0$,
- si $n \geqslant 1$, $X_n = 0$ si à l'issue de la $n^{ième}$ opération, le jeton A se trouve dans C_0 et $X_n = 1$ s'il setrouve dans C_1 ;

I Préliminaire

Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k 4^{k-1} = \dfrac{3^n - (-1)^n}{4}$

II Simulation

1. Soit n un entier strictement positif. Déterminer la probabilité que, à l'issue de la $n^{ième}$ opération, le jeton A n'ait jamais quitté C_0.
2. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on s'interresse à l'événement D_k : à l'issue de la $k^{ième}$ opération, le jeton A revient pour la première fois dans C_0.
   (a) Déterminer la probabilité $p\left(D_2\right)$ et $p(D_3)$.
   (b) Calculer $p(D_k)$ pour tout entier $k \geqslant 2$.
3. On considère les trois matrices
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer rapidement que P est inversible, exhiber son inverse et vérifier que $M = PDP^{-1}$
   (b) En déduire que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier n strictement positif.
4. Etude de la variable X_n.
   (a) Calculer les probabilités $p\left(X_1 = 0\right)$ et $p\left(X_1 = 1\right)$.
   (b) Déterminer une matrice Q telle que, pour tout entier naturel n, on ait l'égalité matricielle :
$$\begin{pmatrix} p(X_{n+1} = 0) \\ p(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} p(X_n = 0) \\ p(X_n = 1) \end{pmatrix}$$
   (c) Exprimer Q en fonction de M. En déduire la matrice Q^n puis la loi de la variable X_n (on remarquera que $\begin{pmatrix} p(X_n = 0) \\ p(X_n = 1) \end{pmatrix} = Q^n \begin{pmatrix} p(X_0 = 0) \\ p(X_0 = 1) \end{pmatrix}$)
   (d) Donner l'espérance et la variance de X_n.

III Etude d'un mouvement du couple de jetons (A, B)

Pour tout entier n, on définit la variable aléatoire W, à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$, décrivant les positions des deux jetons A et B, en posant :

- $W_0 = 0$, et pour tout entier naturel n non nul,
- $W_n = 0$, si à l'issue de la $n^{ième}$ opération, A et B se trouvent tous les deux dans C_0,
- $W_n = 1$, si à l'issue de la $n^{ième}$ opération, A se trouve dans C_0,et B dans C_1,
- $W_n = 2$, si à l'issue de la $n^{ième}$ opération, A se trouve dans C_1,et B dans C_0,
- $W_n = 3$, si à l'issue de la $n^{ième}$ opération, les deux jetons A et B se trouvent dans C_1.

1. Calculer la probabilité $p(W_1 = i)$ pour i égal à $0, 1, 2$ et 3.
2. Déterminer soigneusement la matrice R telle que, pour tout entier naturel n, on ait l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} p\left(W_{n+1} = 0\right) \\ p\left(W_{n+1} = 1\right) \\ p\left(W_{n+1} = 2\right) \\ p\left(W_{n+1} = 3\right) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} p\left(W_n = 0\right) \\ p\left(W_n = 1\right) \\ p\left(W_n = 2\right) \\ p\left(W_n = 3\right) \end{pmatrix}$$

3. On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer les matrices UV, VU, U^2, V^2.

   (b) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, $U^k V = U^k$.

   (c) Soit k un entier, non nul, fixé. Montrer que pour tout entier $r \geqslant 0$, $U^k V^r = U^k$

   (d) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $U^n = 4^{n-1} U$.

   (e) Montrer, sans utiliser de récurrence, que pour tout entier n, $\quad V^{2n} = I_4$ et $V^{2n+1} = V$.

   (f) Etablir, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité

$$(U - V)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k U^k V^{n-k}$$

   où par convention on pose : $U^0 = V^0 = I$.

   (g) A l'aide de la question précédente et du résultat préliminaire I, en déduire, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité

$$(U - V)^n = \frac{1}{4} \left[3^n - (-1)^n\right] U + (-1)^n V^n$$

4. Loi de W_n.

   (a) Exprimer R en fonction de $U - V$. En déduire l'expression de la matrice R^{2n} et de la matrice R^{2n+1}

   (b) Donner la loi de la variable W_{2n} puis la loi de la variable W_{2n+1}.