La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 2 pages, de deux exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 2h

Bonne chance

Exercice 1

Karl et Pascal jouent au jeu suivant. Karl lance deux pièces équilibrées. S'il obtient deux piles, Karl gagne. Sinon Pascal lance à son tour les deux pièces et gagne s'il obtient deux faces. Dans le cas contraire, Karl recommence à lancer les deux pièces. S'il obtient deux piles, il gagne, sinon c'est au tour de Pascal et ainsi de suite jusqu'à l'obtention du gagnant du jeu.
Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose K_k : " Karl gagne au $(2k+1)$ ème lancer " et P_k : " Pascall gagne au $(2k)$ ème lancer "

1. Quelle est la probabilité que Karl gagne au premier coup ?
2. Quelle est la probabilité que Pascal gagne au deuxième coup ?
3. Quelle est la probabilité que Karl gagne au troisième coup ?
4. Quelle est la probabilité k_n que Karl gagne au coup numéro $2n+1$?
5. Quelle est la probabilité p_n que Pascal gagne au coup numéro $2n$?
6. Calculer la probabilité qu'un joueur gagne avant le $5^{ème}$ coup.
7. Un joueur à gagner avant le $5^{ème}$ coup. Calculer la probabilité que cela soit Karl.

Exercice 2

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.
On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant :
après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne puis on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule que l'on vient de tirée.
Pour tout enier naturel n, on note X_n la var égale au nombre de boule blanche obtenues au cours des n tirages. Par exemple, pour $n = 3$ si l'on a obtenue au premier tirage une boule blanche et aux deux autres tirages une boule rouge alors $X_3 = 1$

1. Loi de X_2
   (a) Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, exprimer l'évènement $(X_2 = k)$ à l'aide d'évènements élémentaires.
   (b) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_2.
2. Loi de X_3
   (a) Calculer $P(X_3 = 0)$ et $P(X_3 = 3)$.
   (b) En introduisant le système complet d'évènements $(X_2 = 0)$, $(X_2 = 1)$ et $(X_2 = 2)$, calculer $P(X_3 = 1)$ et $P(X_3 = 2)$.
3. Loi de X_n lorsque $n \geqslant 2$.
   (a) Expliciter $X_n(\Omega)$ et calculer $P(X_n = 0)$.
   (b) Justifier convenablement que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$
   $$P(X_n = k) = P[(X_n = k) \cap (X_{n-1} = k-1)] + P[(X_n = k) \cap (X_{n-1} = k)]$$
   (c) Calculer soigneusement $P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k)$ et $P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k)$.
   (d) Montrer par récurrence sur $n \geqslant 2$ que : $\forall k \in [[1, n]], \quad P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$.
   (e) Donner l'espérance et la variance de X_n (on rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).