La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 2 pages et de quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Démontrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \in [0, 2]$.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $0 \leqslant 2 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{3}(2 - u_n)$.
3. En déduire que $\forall n \geqslant 0$, $0 \leqslant 2 - u_n \leqslant \dfrac{2}{3^n}$.
4. La suite u est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.

Exercice 2

On considère x un réel positif et f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\forall t > 0, \quad f(t) = t\ln(1 + \dfrac{x}{t})$.

1. Calculer $f'(t)$ et $f"(t)$.
2. Dresser le tableau de variation de f' sur $]0, +\infty[$ (limites en $+\infty$ uniquement).
   En déduire le signe de f' sur $]0, +\infty[$ et le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$.
3. A l'aide de fonctions convenables, montrer que $\forall y \geqslant 0, \quad y - \dfrac{y^2}{2} \leqslant \ln(1 + y) \leqslant y$.
4. En déduire un encadrement de $f(t)$ puis $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.
5. <u>Application</u> : on considère la suite $u_n = (1 + \dfrac{x}{n})^n$.
   En remarquant que $\ln u_n = f(n)$, déterminer la monotonie de la suite (u_n) puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 3

On pose $\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{n + k}$

1. <u>Convergence de la suite a.</u>
   (a) Calculer a_1 et a_2 (on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles).
   (b) Justifier que $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2n + 1} - \dfrac{1}{2n}$ puis étudier le sens de variation de (a_n).
   (c) En déduire la convergence de la suite (a_n).
2. <u>Calcul de la limite.</u>

(a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x+1)-\ln x)$ puis montrer que

$$\forall x>0,\quad \frac{1}{x+1}\leqslant \ln(x+1)-\ln x\leqslant \frac{1}{x}.$$

(b) Comparer les trois nombres $\dfrac{1}{n+k+1}$, $\dfrac{1}{n+k}$ et $\ln(n+k+1)-\ln(n+k)$.
Comparer alors les trois sommes $\sum\limits_{k=0}^{n-2}\dfrac{1}{n+k+1}$, $\sum\limits_{k=0}^{n-2}\dfrac{1}{n+k}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-2}(\ln(n+k+1)-\ln(n+k))$.

(c) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-2}(\ln(n+k+1)-\ln(n+k))$.

(d) Vérifier que $a_n-\dfrac{1}{n}=\sum\limits_{k=0}^{n-2}\dfrac{1}{n+k+1}$ et que $a_n-\dfrac{1}{2n-1}=\sum\limits_{k=0}^{n-2}\dfrac{1}{n+k}$

(e) En déduire que $\forall n\geqslant 1,\quad \ln(2-\dfrac{1}{n})+\dfrac{1}{2n-1}\leqslant a_n\leqslant \ln(2-\dfrac{1}{n})+\dfrac{1}{n}$.

(f) Déterminer la limite de la suite (a_n).

Exercice 4

On considère la suite u définie par $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n^2-u_n+3$ avec $u_0\in\mathbb{R}$

1. Préliminaire

   (a) Etudier le signe des trinômes $\dfrac{1}{3}x^2-x+3$ et $\dfrac{1}{3}x^2-2x+3$.

   (b) Démontrer que $\forall x\in[0,3],\quad 0\leqslant \dfrac{1}{3}x^2-x+3\leqslant 3$.

   (c) Etudier la monotonie de u.

2. Etude de la suite u lorsque $u_0\in[0,3]$

   (a) Montrer que $\forall n\geqslant 1,\quad u_n\in[0,3]$.

   (b) En déduire que la suite u est convergente et calculer sa limite.

3. Première étude de la suite u lorsque $u_0>3$.

   (a) Pourquoi est-on assuré que $\forall n\geqslant 0,\quad u_n\geqslant u_0$?

   (b) La suite u possède–t-elle une limite éventuelle ? Conclusion.

4. Etude d'une suite auxiliaire
   On considère la suite w définie pour tout entier n par

   $$w_{n+1}=2w_n-\ln 3 \text{ avec } w_0\in\mathbb{R}.$$

   Exprimer w_n en fonction de n et de u_0.

5. Calcul de la limite de la suite u lorsque $u_0>6$.
   On définit la suite v par : $\forall n\geqslant 0,\quad v_n=u_n-3$.

   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

   (b) Montrer que $\forall n\geqslant 0,\quad \ln v_{n+1}\geqslant 2\ln v_n-\ln 3$.

   (c) Montrer que $\forall n\geqslant 0,\quad \ln v_n\geqslant w_n$ où w est la suite définie à la question 4 avec pour condition initiale $w_0=\ln(v_0)$.

   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.