La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 3 pages, de deux exercices indépendants et d'un problème qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 2h

Bonne chance

Exercice 1 (extrait ESC 1998) :

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $u(t) = \dfrac{3}{2}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})^2$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repére du plan.

1. Vérifier que $u(2\ln 3) = \dfrac{2}{9}$.
2.
   (a) Montrer que $u'(t) = \dfrac{3}{4}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})(3e^{-t/2}-1)$ pour $t \in \mathbb{R}^+$.
   En déduire les variations de u sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) Calculer $\lim\limits_{+\infty} u$

   (c) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
3. Construire (C) ainsi que (T). On prendra comme unités : 2cm en abscisses et 20 cm en ordonnées.
   On donne : $\ln 3 \simeq 1,1$.

Exercice 2 (extrait EDHEC 2000) :

1. Déterminer l'ensemble D des réels tels que $e^x - e^{-x} > 0$.
   On définit la fonction f par : $\forall x \in D,\ f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$.
   On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Etude de f :

   (a) Étudier les variations de f et donner les limites de f aux bornes de D.

   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α puis donner la valeur exacte de α.

   (c) Montrer que le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse α vaut $\sqrt{5}$.
3. Asymptote :

   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$. (indication : $x = \ln e^x$)

   (b) En déduire l'équation de l'asymptote (Δ) à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

   (c) Donner la position relative de (Δ) et (C).
4. Donner l'allure de la courbe (C) en faisant figurer les droites (Δ) et (T).
   On admettra que $\alpha \simeq 0,5$ et que $\sqrt{5} \simeq 2;2$.

Problème (extrait Ecricome 1998) :

Soit f la fonction de deux variables définie par :

$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = xy \exp[(x-1)\ln(1-2y)]$$

1. Première étude de f :
   (a) Déterminer le domaine de définition de f puis le représenter graphiquement dans un repère orthonormé.
   (b) Calculer les deux dérivées partielles d'ordre 1 de f, i.e. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
   Vérifier qu'il existe deux fonctions a et b telles que
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ya(x,y)\exp[(x-1)\ln(1-2y)] \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1-2y}b(x,y)\exp[(x-1)\ln(1-2y)]$$
   (c) Représenter graphiquement l'ensemble des points du plan tels que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.
2. Une inégalité remarquable :
   Montrer que, pour tout élément t de $]0,1[$, on a :
   $$\ln(1-t) < -t$$
   .
3. Etude d'une fonction auxiliaire :
   On note h la fonction définie par
   $$h(x) = (x-1)\ln(1-\frac{1}{x})$$
   (a) Donner le domaine de définition de h et déterminer le signe de h.
   (b) Calculer h' et, à l'aide de la question 2, dresser le tableau de variation de h sur $]1,+\infty[$.
   (c) A l'aide du changement de variable $X = x-1$, déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$.
4. Etude d'une seconde fonction auxiliaire :
   Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier et g l'application définie sur $]0,\dfrac{1}{2}[$ par
   $$g(y) = f(n,y)$$
   (a) Simplifier l'expression $g(y)$.
   (b) Expliciter la dérivée de g et résoudre l'équation $g'(y) = 0$.
   (c) Montrer que g admet un maximum qui est $M_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-1}$