

1 EXERCICE

1.1 Etude de f .

1. L'intervalle de définition de f est symétrique par rapport à 0 et

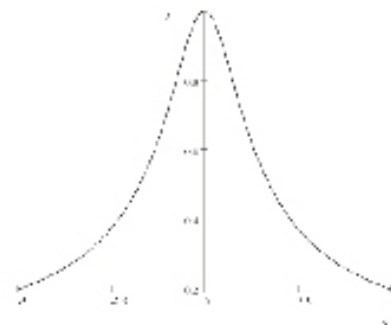
$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x) \text{ donc } f \text{ est paire.}$$

2. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4. Le tableau de variations de f montre que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq f(x) \leq 1$ donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

- 5.



6. La fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et continue sur cet intervalle donc elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur son image $f([0, +\infty[) =]0, 1]$ (d'après le tableau de variations).

- 7.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = y \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} = 1+x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y^2} - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} \text{ (car } x \in [0, +\infty[). \end{aligned}$$

8. La réciproque f^{-1} de f est définie sur $]0, 1]$ à valeurs dans $[0, +\infty[$. Elle associe à un élément $y \in]0, 1]$ son unique antécédent appartenant à $[0, +\infty[$. Le calcul précédent montre que l'antécédent de y recherché est $\sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$ donc

$$\forall y \in]0, 1], \quad f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}.$$

1.2 Calcul d'aire

1. La fonction $s(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ car

$$s(x) \geq \sqrt{x^2 + 1} \geq 1 > 0$$

. S'il existe $x_0 \leq 0$, puisque $s(0) = 1$, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe $c \in [x, 0]$ tel que

$$s(x) = 0 \Leftrightarrow c + \sqrt{c^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{c^2 + 1} = -c \Rightarrow c^2 + 1 = (-c)^2 = c^2 \Rightarrow 1 = 0!$$

Ce n'est pas possible donc la fonction s est toujours strictement positive. Par conséquent, $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est définie pour tout réel x donc $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}$.

2. La fonction $x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ donc $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) &= \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3. Le domaine de définition de F est $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à l'origine. Pour montrer que F est impaire, il suffit de montrer que $F(-x) = -F(x)$.

$$F(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

A priori, on ne voit pas apparaître $-F(x)$. Pour montrer que F est impair, il faut montrer que

$$F(-x) - (-F(x)) = 0 \Leftrightarrow F(-x) + F(x) = 0$$

$$\begin{aligned} F(-x) + F(x) &= \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln\left[(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})\right] \quad ((-a+b)(a+b) =) \\ &= \ln(-x^2 + (\sqrt{x^2 + 1})^2) = \ln(-x^2 + x^2 + 1) = \ln 1 = 0 \text{ (cqfd)} \end{aligned}$$

4. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.
Pour la limite en $-\infty$, on utilise la parité.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x=-t \ t \rightarrow +\infty} F(-t) = - \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = -\infty.$$

5.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda) &= \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x) dx = [F(x)]_{x=\lambda}^{x=2\lambda} = F(2\lambda) - F(\lambda) \\ &= \ln(2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}) - \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}) = \ln\left(\frac{2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}}\right). \end{aligned}$$

Pour déterminer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$, on commence par calculer la limite, lorsque λ tend vers $+\infty$ de $\frac{2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}}$

$$\frac{2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{2\lambda + 2\lambda\sqrt{1 + \frac{1}{4\lambda^2}}}{\lambda + \lambda\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}}} = \frac{\lambda\left(2 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{4\lambda^2}}\right)}{\lambda\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}}\right)} = \frac{2 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{4\lambda^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}}}$$

$$\text{donc } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{2+2}{1+1} = 2, \text{ ce qui implique que } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \ln 2.$$

1.3 Etude de la suite (u_n) .

$$1. u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]_{x=0}^{x=1} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx. \text{ Si on pose } u = x^2 + 1 \text{ alors } u' = 2x. \text{ La fonction}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} u' u^{-1/2}$$

admet comme primitive

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-1/2 + 1} u^{-1/2+1} = u^{1/2} = \sqrt{u} = \sqrt{x^2 + 1}.$$

$$\text{Ainsi, } u_1 = [\sqrt{x^2 + 1}]_{x=0}^{x=1} = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1.$$

$$2. \begin{cases} u' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ v = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{1+x^2} \\ v' = 2x \end{cases} \text{ donc}$$

$$u_3 = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left[x^2 \sqrt{1+x^2} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 2x \sqrt{1+x^2} dx = \sqrt{2} - \int_0^1 2x \sqrt{1+x^2} dx.$$

On voit de nouveau une dérivée. Si l'on pose $u = 1 + x^2$ alors la fonction

$$2x \sqrt{1+x^2} = u' \sqrt{u} = u' u^{1/2}$$

possède comme primitive la fonction

$$\frac{1}{1/2 + 1} u^{1/2+1} = \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{2}{3} (1+x^2)^{3/2}.$$

Nous avons donc

$$\int_0^1 2x \sqrt{1+x^2} dx = \left[\frac{2}{3} (1+x^2)^{3/2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3} (2^{3/2} - 1) = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{et } u_3 = \sqrt{2} - \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$3. u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

La fonction $x \mapsto \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}$ est négative sur $[0, 1]$ donc son intégrale sur $[0, 1]$ est négative, ce qui implique que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

4. La fonction $x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$ est positive sur $[0, 1]$ donc son intégrale sur cet intervalle est positive, ce qui implique que $\forall n \geq 0, u_n \geq 0$. Ainsi, la suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 donc elle converge dans $\mathbb{R}$.

5. $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq 2$ donc

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1.$$

Puisque $x^n \geq 0$ sur l'intervalle $[0, 1]$, on en déduit que

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n.$$

En intégrant cette inégalité sur $[0, 1]$, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

6. La suite (u_n) est encadrée par deux suites tendant vers 0 donc le théorème d'encadrement montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2 EXERCICE

2.1 Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

1. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. La matrice P est inversible si et seulement si l'équation $PX = Y \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet, quel que soit $Y \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, une et seule solution $X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = a \\ -x + 2y - z = b \\ x - y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = a \\ -x + 2y - z = b \\ x - y + z = c \end{cases} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = a \\ 5y - z = 2b + a \\ -3y + z = 2c - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = a \\ 5y - z = a + 2b \\ 2z = -2a + 6b + 10c \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow 5L_3 + 3L_2 \end{matrix}$$

Ce dernier système est carré, triangulaire supérieur et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc le système est de Cramer, ce qui implique que P est inversible et

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} z = -a + 3b + 5c \\ y = \frac{1}{5}(a + 2b + z) = b + c \\ x = \frac{1}{2}(a - y - z) = a - 2b - 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 2b - 3c \\ y = b + c \\ z = -a + 3b + 5c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} Y \Leftrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.

$$(a) \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = 0_3 \text{ donc } \forall n \geq 3, \quad T^n = T^{n-3}T^3 = 0.$$

$$(c) \quad \forall n \geq 3, \quad 0 = T^n = (PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1} \text{ donc } \forall n \geq 3, \quad A^n = P^{-1}0P = 0.$$

3.

- (a) On développe simplement la formule en utilisant que $A^n = 0$ si $n \geq 3$.

$$\begin{aligned} E(t)E(t') &= (I + tA + \frac{t^2}{2}A^2)(I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2) \\ &= I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2 + tA + tt'A^2 + \frac{t^2}{2}A^2 \\ &= I + (t+t')A + \frac{t^2 + 2tt' + t'^2}{2}A^2 \\ &= I + (t+t')A + \frac{(t+t')^2}{2}A^2 = E(t+t'). \end{aligned}$$

$$(b) \quad E(t)E(-t) = E(t + (-t)) = E(0) = I \text{ donc } E(t) \text{ est inversible et } E(-t) = I - tA + \frac{t^2}{2}A^2 \text{ est son inverse.}$$

$$(c) \quad n = 2, \quad E(t)^2 = E(t)E(t) = E(t+t) = E(2t), \\ n = 3, \quad E(t)^3 = E(t)^2E(t) = E(2t)E(t) = E(2t+t) = E(3t).$$

Montrons par récurrence que pour tout réel t et tout entier n , la proposition $(\mathcal{P}_n) : E(t)^n = E(nt)$ est vraie

Initialisation : $n = 0$, $E(t)^0 = I = E(0)$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.

$$E(t)^{n+1} = E(t)^nE(t) \stackrel{(\mathcal{P}_n)}{=} E(nt)E(t) = E(nt+t) = E((n+1)t)$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie donc

$$\forall n \geq 0, \quad E(t)^n = E(nt) = I + ntA + \frac{(nt)^2}{2}A^2.$$

2.2 Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

1. La matrice $B - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible si et seulement si le système suivant n'est pas de Cramer

$$\begin{cases} -\lambda x - y = 0 \\ 2x + (3 - \lambda)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (3 - \lambda)y = 0 \\ -\lambda x - y = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ = 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (3 - \lambda)y = 0 \\ (\lambda(3 - \lambda) - 2)y = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_2 \leftrightarrow 2L_2 + \lambda L_1 \end{matrix} \begin{matrix} \\ = 0 \end{matrix}.$$

Ce dernier système étant carré et triangulaire, son premier coefficient diagonal étant non nul, il n'est pas de Cramer si et seulement si

$$\lambda(3 - \lambda) - 2 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2.$$

2. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors

$$BX = X \Leftrightarrow \begin{cases} -y = x \\ 2x + 3y = y \end{cases} \Leftrightarrow \{y = -x \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

$$BX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 2x \\ 2x + 3y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \{y = -2x \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}.$$

3. On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$(a) \quad Q^2 = aQ + bI \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ -a & -2a+b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=-1 \\ -a=1 \\ -2a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases} \text{ donc } Q^2 = -Q + I$$

$$(b) \quad Q^2 + Q = I \Leftrightarrow Q(Q + I) = I \text{ donc } Q \text{ est inversible et } Q^{-1} = Q + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et un calcul direct montre que } Q^{-1}BQ = D.$$

- 4.

$$Q^{-1}BQ = D \Rightarrow \forall n \geq 0, \quad (Q^{-1}BQ)^n = D^n \Leftrightarrow Q^{-1}B^nQ = D^n \Leftrightarrow B^n = QD^nQ^{-1}$$

$$\Leftrightarrow B^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

5. Par définition de l'addition des matrices, le coefficient 1, 1 de $E_n(t)$ est la somme des coefficients 1, 1 de $\frac{t^k}{k!} B^k$, qui est $\frac{t^k}{k!} (2 - 2^k)$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (2 - 2^k) = \sum_{k=0}^n \frac{2t^k - 2^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}.$$

De même, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (1 - 2^k) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k - (2t)^k}{k!},$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (2^{k+1} - 2) = \sum_{k=0}^n \frac{2(2t)^k - 2t^k}{k!},$$

$$d_n = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (2^{k+1} - 1) = \sum_{k=0}^n \frac{2(2t)^k - t^k}{k!}.$$

6. Si on lève la tête du guidon et que l'on regarde la question suivante, il est indiqué que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(t) = e^t - e^{2t}$. On doit alors se demander si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = e^t$. Eclair

de génie, les séries! La série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ converge et sa somme est e^x , c'est-à-dire, la

suite $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ converge vers e^x .

$$a_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{2t^k - (2t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{2t^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} = 2 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^t - e^{2t}$$

De même, on a :

$$b_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k - (2t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^t - e^{2t}$$

$$c_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{2(2t)^k - 2t^k}{k!} = 2 \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2e^{2t} - 2e^t$$

$$d_n = \sum_{k=0}^n \frac{2(2t)^k - t^k}{k!} = 2 \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2e^{2t} - e^t.$$

7.

- (a) La question précédente résoud cette question, qui, soit dit en passant, ne sert qu'à rappeler aux étudiants de faire intervenir les séries pour résoudre la question précédente !

(b)

$$\begin{aligned} E(t) &= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t & e^t \\ -2e^t & -e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{2t} & -e^{2t} \\ 2e^{2t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{donc } E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (c) $E_1^2 = E_1$, $E_2^2 = E_2$, $E_1 E_2 = 0$, $E_2 E_1 = 0$.

(d)

$$\begin{aligned} E(t)E(-t) &= (e^t E_1 + e^{2t} E_2)(e^{-t} E_1 + e^{-2t} E_2) \\ &= E_1^2 + e^{-t} E_1 E_2 + e^t E_2 E_1 + E_2^2 = E_1 + E_2 = I. \end{aligned}$$

La matrice $E(t)$ est donc inversible et son inverse est $E(-t)$

3 Exercice

1. Notons, improprement, A l'évènement " le serveur A est choisi ", B l'évènement " le serveur B est choisi ", T l'évènement " il a une erreur de transmission ". L'énoncé indique que $P(A) = \frac{7}{10}$, $P(B) = \frac{3}{10}$, $P_A(T) = \frac{1}{10}$ (le serveur A étant choisi, on a 1 chance sur 10 pour qu'il y ait une erreur de transmission) et $P_B(T) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.

- (a) Soit on a choisi le serveur A , soit on a choisi le serveur B . La famille (A, B) étant un système complet d'évènements, la formule des probabilités totales montre que

$$P(T) = P(A)P_A(T) + P(B)P_B(T) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{200}(14 + 3) = \frac{17}{200}.$$

- (b) Ce qui est réalisé est l'erreur de transmission, ce que l'on souhaite est que le serveur A soit choisi. On nous demande donc de calculer $P_T(A)$. Notre ami

Bayes nous fournit l'égalité

$$P_T(A) = \frac{P_A(T)P(A)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{17}{200}} = \frac{7}{100} \cdot \frac{200}{17} = \frac{14}{17}.$$

2.

- (a) L'énoncé nous mène le travail :-). L'évènement $(L = k)$ signifie que l'on a utilisé durant les k premiers jours le même serveur, soit toujours le A , soit toujours le B , et le $(k+1)^{\text{ième}}$ jour on a utilisé l'autre serveur. Ainsi, on a

$$(L_1 = k) = \underbrace{(A \dots A)}_{k \text{ fois}} B \cup \underbrace{(B \dots B)}_{k \text{ fois}} A.$$

Les évènements $A \dots AB$ et $B \dots BA$ sont clairement incompatibles (disjoints en terme d'ensemble) donc

$$P(L_1 = k) = P(A \dots AB) + P(B \dots BA).$$

Les choix des serveurs étant supposés indépendants, on a

$$\begin{aligned} P(L_1 = k) &= P(A) \dots P(A)P(B) + P(B) \dots P(B)P(A) \\ &= (P(A))^k P(B) + (P(B))^k P(A) = (0.7)^k (0.3) + (0.3)^k (0.7). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} p(L_1 = k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (0.7)^k (0.3) + (0.3)^k (0.7) = (0.3) \sum_{k=1}^{+\infty} (0.7)^k + (0.7) \sum_{k=1}^{+\infty} (0.3)^k \\ &= (0.3) \left((0.7)^1 + (0.7)^2 + \dots \right) + (0.7) \left((0.3)^1 + (0.3)^2 + \dots \right) \\ &= (0.3)(0.7) (1 + (0.7) + \dots) + (0.7)(0.3) (1 + (0.3) + \dots) \\ &= (0.3)(0.7) \sum_{k=0}^{+\infty} (0.7)^k + (0.7)(0.3) \sum_{k=0}^{+\infty} (0.3)^k \\ &= (0.3)(0.7) \left(\frac{1}{1-0.7} + \frac{1}{1-0.3} \right) = (0.3)(0.7) \left(\frac{1}{0.3} + \frac{1}{0.7} \right) \\ &= (0.7) + (0.3) = 1 \end{aligned}$$

(c) Montrons que L_1 admet une espérance. La série $\sum_{k \geq 1} kP(L_1 = k)$ s'écrit

$$\sum_{k \geq 1} kP(L_1 = k) = (0.3) \sum_{k \geq 1} k(0.7)^k + (0.7) \sum_{k \geq 1} k(0.3)^k.$$

Puisque (0.3) et (0.7) appartiennent à l'intervalle $] -1, 1[$, les séries $\sum_{k \geq 1} k(0.7)^k$ et $\sum_{k \geq 1} k(0.3)^k$ sont convergentes donc la série $\sum_{k \geq 1} kP(L_1 = k)$ est convergente. En outre, l'espérance de L_1 est

$$\begin{aligned} E(L_1) &= (0.3) \sum_{k=1}^{+\infty} k(0.7)^k + (0.7) \sum_{k=1}^{+\infty} k(0.3)^k = (0.3) \sum_{k=0}^{+\infty} k(0.7)^k + (0.7) \sum_{k=0}^{+\infty} k(0.3)^k \\ &= (0.3) \frac{(0.7)}{(1 - (0.7))^2} + (0.7) \frac{(0.3)}{(1 - (0.3))^2} = (0.3) \frac{(0.7)}{(0.3)^2} + (0.7) \frac{(0.3)}{(0.7)^2} \\ &= \frac{(0.7)}{(0.3)} + \frac{(0.3)}{(0.7)} = \frac{7}{3} + \frac{3}{7} = \frac{58}{21}. \end{aligned}$$

(d) $L_2(\Omega) = \mathbb{N}^\times$ (si on a ABA alors $L_1 = 1$ et $L_2 = 1$). Soient $i \in \mathbb{N}^\times$ et $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, l'évènement $(L_1 = i \cap L_2 = j)$ signifie que l'on a choisi soit A durant les i premiers jours puis B durant les j jours suivants et A le $(i+j+1)^{ième}$ jour, soit B durant les i premiers jours puis A durant les j jours suivants et B le $(i+j+1)^{ième}$ jour. On en déduit que :

$$(L_1 = i \cap L_2 = j) = (\underbrace{A \dots A}_{i \text{ fois}} \underbrace{B \dots B}_{j \text{ fois}} A) \cup (\underbrace{B \dots B}_{i \text{ fois}} \underbrace{A \dots A}_{j \text{ fois}} B).$$

En particulier, on a choisi $(i+1)$ fois le serveur A et j fois le serveur B dans le premier cas et $(i+1)$ fois le serveur B et j fois le serveur A dans le deuxième cas. Les évènements $(A \dots A B \dots B A)$ et $(B \dots B A \dots A B)$ étant incompatibles et les choix des serveurs indépendants, on obtient, pour tous les entiers i, j non nuls,

$$\begin{aligned} P(L_1 = i \cap L_2 = j) &= P(A \dots A B \dots B A) + P(B \dots B A \dots A B) \\ &= (P(A))^{i+1} (P(B))^j + (P(B))^{i+1} (P(A))^j = (0.7)^{i+1} (0.3)^j + (0.3)^{i+1} (0.7)^j \end{aligned}$$

(e) $L_2(\Omega) = \mathbb{N}^\times$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^\times$, on a

$$\begin{aligned} P(L_2 = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(L_1 = i \cap L_2 = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} ((0.7)^{i+1} (0.3)^j + (0.3)^{i+1} (0.7)^j) \\ &= (0.3)^j \sum_{i=1}^{+\infty} (0.7)^{i+1} + (0.7)^j \sum_{i=1}^{+\infty} (0.3)^{i+1} \\ &= (0.3)^j ((0.7)^2 + (0.7)^3 + \dots) + (0.7)^j ((0.3)^2 + (0.3)^3 + \dots) \\ &= (0.3)^j (0.7)^2 (1 + (0.7) + \dots) + (0.7)^j (0.3)^2 (1 + (0.3) + \dots) \\ &= (0.3)^j (0.7)^2 \cdot \frac{1}{1 - (0.7)} + (0.7)^j (0.3)^2 \cdot \frac{1}{1 - (0.3)} \\ &= (0.3)^{j-1} (0.7)^2 + (0.7)^{j-1} (0.3)^2. \end{aligned}$$

3.

(a) Soit $\mathcal{E}$ l'expérience : " choix du serveur ". On répète n fois l'expérience $\mathcal{E}$, ces expériences étant deux à deux indépendantes. La variable N_n représente le nombre de fois où l'évènement A se réalise donc N_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, (0.7))$ donc

$$N_n(\Omega) = [0, n] \text{ et } \forall k \in [0, n], \quad P(N_n = k) = \binom{n}{k} (0.7)^k (0.3)^{n-k}$$

et $E(N_n) = (0.7)n$, $V(X) = n(0.7)(0.3) = (0.21)n$.

(b) Soit $\mathcal{E}'$ l'expérience " choix du serveur ". On répète indéfiniment les expériences $\mathcal{E}'$ jusqu'à la première réalisation de l'évènement A (choix du serveur A). Puisque les expériences étant deux à deux indépendantes, que $P(A) = 0.7$, on en déduit que la variable T_1 suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0.7)$.

$$T_1(\Omega) = \mathbb{N}^\times \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad P(T_1 = n) = (0.7)(0.3)^{n-1}.$$

D'autre part, les séries $\sum_{n \geq 1} nP(T_1 = n) = (0.3)^{-1}(0.7) \sum_{n \geq 1} n(0.3)^n$ et $\sum_{n \geq 1} n^2 P(T_1 = n) = (0.3)^{-1}(0.7) \sum_{n \geq 1} n^2 (0.3)^n$ sont convergentes car $(0.7) \in$

$] - 1, 1[$ donc T_1 admet une espérance et une variance.

$$\begin{aligned}
 E(T_1) &= (0.3)^{-1}(0.7) \sum_{n=1}^{+\infty} n(0.3)^n = (0.3)^{-1}(0.7) \sum_{n=0}^{+\infty} n(0.3)^n \\
 &= (0.3)^{-1}(0.7) \cdot \frac{(0.3)}{(1 - (0.3))^2} = \frac{(0.7)}{(0.7)^2} = \frac{1}{(0.7)} = \frac{10}{7} \\
 E(T_1^2) &= (0.3)^{-1}(0.7) \sum_{n=1}^{+\infty} n^2(0.3)^n = (0.3)^{-1}(0.7) \sum_{n=0}^{+\infty} n^2(0.3)^n \\
 &= (0.3)^{-1}(0.7) \cdot \frac{(0.3)((0.3) + 1)}{(1 - (0.3))^3} = \frac{(1.7)(0.7)}{(0.7)^2} = \frac{1.7}{0.7} = \frac{17}{10} \times \frac{10}{7} = \frac{17}{7} \\
 V(T_1) &= E(T_1^2) - (E(T_1))^2 = \frac{17}{7} - \frac{10^2}{7^2} = \frac{17 \times 7 - 10^2}{7^2} = \frac{19}{49}.
 \end{aligned}$$

- (c) Pour commencer $T_2(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ (il faut deux tentatives pour obtenir une seconde fois le serveur A). Si $k \geq 2$, la réalisation de l'évènement $(T_2 = k)$ signifie que durant les $(k - 1)$ premiers jours, on a choisi qu'une seule fois le serveur A , c'est-à-dire $N_{k-1} = 1$, et que le $k^{\text{ième}}$ jour, on a choisi le serveur A . Les évènements $(N_{k-1} = 1)$ et A sont indépendants (les choix des serveurs précédents le $k^{\text{ième}}$ jour n'influe pas sur le choix du serveur du $k^{\text{ième}}$ jour). On en déduit que

$$\begin{aligned}
 P(T_2 = k) &= P(N_{k-1} = 1) \cap A = P(N_{k-1} = 1)P(A) \\
 &= \binom{k-1}{1}(0.7)^1(0.3)^{(k-1)-1}(0.7) = (k-1)(0.7)^2(0.3)^{k-2}.
 \end{aligned}$$

4 Exercice (extrait ESCP 1994)

1.

- (a) La dérivée de g est $g'(x) = 3x^2 - 6x - 4$ dont les racines sont $\alpha = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{21} < 0$ et $\beta = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{21} > 0$. On en déduit le tableau de variation de g

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g'(x)$		+		-		+	
$g(x)$		$\nearrow$	$g(\alpha) > 0$	$\searrow$	$g(\beta) < 0$	$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$						

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, elle est strictement croissante sur $] - \infty, \alpha]$ donc elle réalise une bijection de $] - \infty, \alpha]$ sur $] - \infty, g(\alpha)]$. Puisque $0 \in] - \infty, g(\alpha)]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique racine $x_1 \in] - \infty, \alpha]$. On procède de même sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ (ce qui donne x_2) et sur $[\beta, +\infty[$ (ce qui donne x_3). Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.

- (b) Puisque la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[1, 2] \subset [\alpha, \beta]$ et que $g(1) = 2 > g(x_2) = 0 > g(2) = -4$, on en déduit que $1 < x_2 < 2$.

2.

(a)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x \Leftrightarrow \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x + 8) = x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x + 8 = 6x \\
 &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0
 \end{aligned}$$

Puisque $g(x_2) = 0$, on en déduit que $f(x_2) = x_2$.

- (b) Il est indispensable de dresser le tableau de variation de f sur $[1, 2]$. La dérivée de f est $f'(x) = \frac{1}{6}(3x^2 - 6x + 2)$ dont les racines sont $\gamma = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ et $\delta = \frac{1}{3}\sqrt{3} + 1$

x	1		$1 < \delta < 2$		2
$f'(x)$		+		-	
$f(x)$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	$f(\gamma)$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$

donc $f([1, 2]) = [f(\gamma), \frac{4}{3}] \subset [1, 2]$ car $1 \leq \frac{4}{3} \leq 2$ et $1 \leq f(\gamma) \leq 2$.

- (c) La dérivée de f' est $f''(x) = x - 1$ qui est positive $[1, 2]$ donc f' est croissante sur $[1, 2]$ et

$$\forall x \in [1, 2], \quad -\frac{1}{6} = f'(1) \leq f'(x) \leq f'(2) = \frac{1}{3}.$$

- (d) Puisque lorsque $x \in [1, 2]$, $f'(x) \in [-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$, on en déduit que la distance de $f'(x)$ à 0 est moindre que $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire

$$\forall x \in [1, 2], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{3}.$$

L'inégalité précédente, combiné au fait que la fonction f étant C^1 sur $[1, 2]$, que $x_2 \in [1, 2]$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis, ce qui nous donne

$$\forall x \in [1, 2], \quad |f(x) - f(x_2)| \leq \frac{1}{3} |x - x_2|.$$

3. Montrons pour commencer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, 2]$. Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $u_n \in [1, 2]$ ".

Initialisation : $u_0 = 1 \in [1, 2]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [1, 2]$ donc $f(u_n) \in [1, 2]$ (par stabilité de $[1, 2]$ par f) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [1, 2]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}_n)$ est vraie.

On peut appliquer l'inégalité obtenue à la question 2.d au point $x = u_n$. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(x_2) = x_2$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - x_2| \leq \frac{1}{3} |u_n - x_2|. \quad (1)$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - x_2| \leq \frac{1}{3^n} |1 - x_2|$. Posons $(\mathcal{P}_n)$: "

$$|u_n - x_2| \leq \frac{1}{3^n} |1 - x_2| \text{ " .}$$

Initialisation : $|u_0 - x_2| = |1 - x_2| = \frac{1}{3^0} |1 - x_2|$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $\frac{1}{3^n} |1 - x_2|$ et l'inégalité (1) nous fournit l'inégalité

$$|u_{n+1} - x_2| \leq \frac{1}{3} |u_n - x_2| \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^n} |1 - x_2| = \frac{1}{3^{n+1}} |1 - x_2|,$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}_n)$ est vraie.

La suite $|u_n - x_2|$ est positive et majorée par la suite $(\frac{1}{3^n} |1 - x_2|)_{n \geq 0}$ converge vers 0 (car il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$). Le théorème d'enca-drement montre que $|u_n - x_2|$ converge vers 0, c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_2$.