Exercice 1

1. $X(\Omega) = [\![1,3]\!]$ et $\forall k \in [\![1,3]\!]$, $\quad P(X=k) = \dfrac{C_4^k C_2^{3-k}}{C_6^3}$ donc
   $P(X=1) = \dfrac{4}{20}$, $P(X=2) = \dfrac{12}{20}$, $P(X=3) = \dfrac{4}{20}$.
   $E(X) = 3.\dfrac{4}{6} = 2$, $\quad E(X^2) = 1.\dfrac{4}{20} + 4.\dfrac{16}{20} + 9.\dfrac{4}{20} = \dfrac{26}{5}$, $\quad V(X) = \dfrac{26}{5} - 4 = \dfrac{6}{5}$.
2. $Y(\Omega) = [\![0,2]\!]$, si l'on a tiré 1 seule boule rouge, on a donc pioché également 2 boules blanches. On a alors reposé les deux boules blanches. L'urne dispose de 3 boules rouges et 2 boules blanches donc on pioche deux boules. Par suite

$$P(X=1 \cap Y=0) = P(X=1)P_{(X=1)}(Y=0) = \frac{4}{20}.C_2^0(\frac{2}{5})^0(\frac{3}{5})^{2-0} = \frac{9}{125}.$$

   Les calculs suivants sont analogues.

$$\begin{aligned}
P(X &= 1 \cap Y=1) = \frac{4}{20}C_2^1(\frac{2}{5})^1(\frac{3}{5})^{2-1} = \frac{12}{125} \quad P(X=1\cap Y=2) = \frac{4}{20}C_2^2(\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^{2-2} = \frac{4}{125}\\
P(X &= 2 \cap Y=0) = \frac{12}{20}.\frac{2}{4} = \frac{6}{20}, \quad P(X=2\cap Y=1) = \frac{12}{20}.\frac{2}{4} = \frac{6}{20}, \quad P(X=2\cap Y=2) = 0\\
P(X &= 3 \cap Y=0) = \frac{4}{20}.1 = \frac{4}{20}, \quad P(X=3\cap Y=1) = 0, \quad P(X=3\cap Y=2) = 0
\end{aligned}$$

3. $P(Y=0) = \dfrac{9}{125} + \dfrac{6}{20} + \dfrac{4}{20} = \dfrac{143}{250}$, $\quad P(Y=1) = \dfrac{12}{125} + \dfrac{6}{20} = \dfrac{99}{250}$, $\quad P(Y=2) = \dfrac{4}{125}$.
   $E(Y) = 1.\dfrac{99}{250} + 2.\dfrac{4}{125} = \dfrac{115}{250} = \dfrac{23}{50}$
4. $Z(\Omega) = [\![0,3]\!]$, $\quad P(Z=0) = P(X=1\cap Y=1) + P(X=2\cap Y=2) = \dfrac{12}{125}$,
   $P(Z=1) = P(X=1\cap Y=0) + P(X=1\cap Y=2) + P(X=2\cap Y=1) + P(X=3\cap Y=2) = \dfrac{9}{125} + \dfrac{4}{125} + \dfrac{6}{20} = \dfrac{101}{250}$,
   $P(Z=2) = P(X=2\cap Y=0) + P(X=3\cap Y=1) = \dfrac{6}{20}$ et $P(Z=3) = P(X=3\cap Y=0) = \dfrac{4}{20}$.

Exercice 2

1. La fonction f_n étant la somme de n fonctions continues et strictement croissante sur $[0,1]$, elle est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ donc elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0,n]$. Puisque $1 \in [0,n]$, il existe une et une seule solution à l'équation $f_n(x) = 1$.
2. Puisque la fonction f_n est croissante sur $[0,1]$ et que $f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + f_n(u_n) = u_n^{n+1} + 1 \geqslant 1$, on en déduit que $u_n \geqslant u_{n+1}$ donc la suite u est décroissante.
3. La suite u est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.
4. Calcul de la limite.
   (a) $f_n(x) = x + x^2 + ... + x^n = x(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}) = x\dfrac{1-x^n}{1-x} = \dfrac{x - x^{n+1}}{1-x}$ pour $x \neq 1$.
   (b) $f_2(x) = 1 \Leftrightarrow x + x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in [0,1]$ ou $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ donc $u_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
   La suite u est décroissante et positive donc $\forall n \geqslant 2$, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_2 \Rightarrow 0 \leqslant u_n^{n+1} \leqslant u_2^{n+1}$. La suite $(u_2^{n+1})_{n\geqslant 2}$ convergeant vers 0, on peut appliquer le théorème d'encadrement donc $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^{n+1} = 0$.
   (c) Notons L la limite de la suite u. Puisque $\forall n \geqslant 2$, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_2 \leqslant 0.7$, on est assuré que $0 \leqslant L \leqslant 0.7 < 1$. Ensuite, l'égalité $f_n(u_n) = 1$ nous assure que la suite $(f_n(u_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers 1 et l'égalité $f_n(u_n) = \dfrac{u_n - u_n^{n+1}}{1-u_n}$ montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(u_n) = \dfrac{L}{1-L}$. La limite L satisfait donc à l'égalité $\dfrac{L}{1-L} = 1$ avec $L \in [0,1[$ donc $L = 1 - L \Leftrightarrow L = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3

1. C'est le nombre de boules blanches obtenues au cours des p tirages.
2. $X_1(\Omega) = \{0,1\}, \quad P(X_1=0) = \frac{1}{2}, \quad P(X_1=1) = \frac{1}{2}; \quad E(X_1) = \frac{1}{2}$
3.
   - $(X_1, X_2)(\Omega) = \{0,1\}^2$.
     L'évènement $(X_1 = 0 \cap X_2 = 0)$ signifie que l'on pioche une boule noire au premier tirage, on remet c boules noires supplémentaires dans l'urne qui contient alors $c+1$ noires et 1 blanche donc
     $$P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = P(X_1=0)P(X_2 = 0/X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2}$$
     Par le même type de raisonnement, on obtient
     $$\begin{aligned} P(X_1 &= 0 \cap X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1/X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} \\ P(X_1 &= 1 \cap X_2 = 0) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 0/X_1 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} \\ P(X_1 &= 1 \cap X_2 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1/X_1 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2} \end{aligned}$$
     Il est immédiat que $\sum\limits_{i,j} P(X_1 = i \cap X_2 = j) = 1$ ce qui nous assure d'un bon calcul
   - $X_2(\Omega) = \{0,1\}$ et
     $$P(X_2 = 0) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} = \frac{1}{2}$$
     et $P(X_2 = 1) = 1 - P(X_2 = 0) = \frac{1}{2}$. Il est immédiat que $E(X_2) = \frac{1}{2}$
4. Nous avons $Z_2(\Omega) = \{0,1,2\}$ et
   $$P(Z_2 = 0) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2}$$
   $$\begin{aligned} P(Z_2 = 1) &= P((X_1 = 1 \cap X_2 = 0) \cup (X_1 = 0 \cap X_2 = 1)) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} = \frac{1}{c+2} \end{aligned}$$
   $$P(Z_2 = 2) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2}$$
5. D'après la question 1, on a $Z_p(\Omega) = [\![0,p]\!]$ de Z_p.
6. Soit $p \leqslant n-1$.
   (a) "L'évènement" $(X_{p+1} = 1 / Z_p = k)$ signifie que l'on déjà obtenu k boules blanches en p tirages : on a donc ajouté $k \times c$ boules blanches et $(p-k) \times c$ boules noires. Après le $p^{ième}$ tirage, l'urne contient $p \times c + 2$ boules dont $kc+1$ boules blanches et $(p-k) \times c + 1$ boules noires. On pioche une boule dans cette urne et on obtient une blanche. La probabilité d'obtenir une blanche est $\frac{kc+1}{pc+2}$. On a alors
   $$\forall k \in Z_p(\Omega), \qquad P(X_{p+1} = 1 / Z_p = k) = \frac{kc+1}{pc+2}$$
   (b) On considère le système complet d'évènements $(Z_p = k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$
   $$\begin{aligned} P(X_{p+1} &= 1) = \sum_{k=0}^{p} P(X_{p+1} = 1 / Z_p = k) P(Z_p = k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{kc+1}{pc+2} P(Z_p = k) \\ &= \frac{1}{2+pc} \sum_{k=0}^{p} (kc+1) P(Z_p = k) = \frac{c}{2+pc} \sum_{k=0}^{p} k P(Z_p = k) + \frac{1}{2+pc} \sum_{k=0}^{p} P(Z_p = k) \\ &= \frac{c}{2+pc} E(Z_p) + \frac{1}{2+pc} = \frac{1 + cE(Z_p)}{2+pc} \end{aligned}$$

(c) Posons $(\mathcal{H}_p)$: les variables $X_1, .., X_p$ suivent une loi de de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$
Initialisation : $(\mathcal{H}_1)$ est vraie d'après la question 2
Hérédité : supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie. La question 6b montre que

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}. \tag{1}$$

On a $Z_p = \sum\limits_{k=1}^{p} X_k$ où les variables $X_1, .., X_p$ suivent une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$donc

$$E(Z_p) = \sum_{k=1}^{p} E(X_k) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2} = \frac{p}{2} \tag{2}$$

Les égalités (1) et (2) nous montre que

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + c\frac{p}{2}}{2 + pc} = \frac{\frac{2 + pc}{2}}{2 + pc} = \frac{1}{2}$$

donc

$$P(X_{p+1} = 0) = 1 - P(X_{p+1}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ce qui démontre que la variable X_{p+1} suit une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Problème

1. Etude de la fonction f.

1. La fonction sh est clairement C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch} > 0$ donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$ et $\mathrm{sh}(0) = 0$, on en déduit que cette fonction est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$. La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image qui est $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ sont C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad \mathrm{sh}(x) \neq 0$ donc f est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et $\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad f'(x) = \frac{\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2(x)}$ En particulier, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^\times$. Après un petit de $DL_1(0)$ de $\mathrm{sh}(x)$, on obtient que $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to0}{=} x + o(x)$ donc $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to0}{\sim} x$ d'où $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ ce qui nous conduit à l'égalité $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1 = f(0)$ qui démontre la continuité de f en 0.
3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ donc on est en droit d'essayer d'appliquer le théorème de prolongement continue de la dérivée. Nous savons que $f'(x) = \frac{\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2(x)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)}{x^2}$ donc nous allons effectuer un $DL_2(0)$ de $\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)$. Il est immédiat que $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ ce qui donne

$$2(\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)) \underset{x\to0}{=} x + o(x^2) - x(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \underset{x\to0}{=} o(x^2)$$

donc $f(x) = \underset{x\to0}{=} \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1) \to 0$ ce qui démontre que $\lim\limits_{x\to0} f'(x) = 0$. Ainsi f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.
4. $h'(x) = \mathrm{ch}\,x - (\mathrm{ch}\,(x) + x\,\mathrm{sh}(x)) = -x\,\mathrm{sh}(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $h(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) \leqslant 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad h(x) \geqslant 0$
5. La dérivée de f est $f'(x) = \frac{h(x)}{\mathrm{sh}^2(x)}$ est négative sur $\mathbb{R}_+$ et positive sur $\mathbb{R}_-$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et croissante sur $\mathbb{R}_-$.

2. Etude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Le tableau de variations de f montre que $f([0.8,1]) = [f(1), f(0.8)] \subset [0.8,1]$. Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $u_n \in [0.8,1]$ ".
Initialisation : $u_0 = 1 \in [0;8,1]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraiz. $u_n \in [0.8,1]$ donc $f(u_n) \in [0.8,1]$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0.8,1]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
2. On introduit la fonction $g(x) = f(x) - x$. Sa dérivée est $g'(x) = f'(x) - 1$ qui est négative sur $\mathbb{R}$ donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et elle est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image. Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. La fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. D'autre part, $g(0.8) = f(0.8) - 0.8 \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ donc $\alpha \in [0.8,1]$.
3. On sait que la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in [0.8,1], \quad h(1) \leqslant h(x) \leqslant h(0.8) \leqslant 0$ et la fonction sh^2 est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (car sh est croissante et positive sur cet intervalle) donc $\operatorname{sh}^2(0.8) \leqslant \operatorname{sh}^2(x) \leqslant \operatorname{sh}^2(1)$ et $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(1)} \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(x)} \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(0.8)}$. En utilisant la remarque de la question, on en déduit que $\dfrac{h(1)}{\operatorname{sh}^2(0.8)} \leqslant \dfrac{h(x)}{\operatorname{sh}^2(x)}$ et $\dfrac{h(x)}{\operatorname{sh}^2(x)} \leqslant \dfrac{h(0.8)}{\operatorname{sh}^2(1)}$.
4. L'inégalité précédente montre que $\forall x \in [0.8,1], \quad |f'(x)| \leqslant 0.5$. Le théorème des accroissements finis montre que $\forall x, y \in [0.8,1]$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant 0.5\,|x-y|$. En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ et $y = \alpha$, on obtient que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0.5\,|u_n - \alpha|$.
Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $|u_n - \alpha| \leqslant 0.2\,(0.5)^n$ ".
Initialisation : $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leqslant 0.2$ car 1 et α appartiennent à $[0.8,1]$ qui est de longueur 0.2. Puisque $0.2\,(0.5)^0 = 0.2$, on en déudit que $(\mathcal{P}_0)$ est vrai.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $|u_n - \alpha| \leqslant 0.2\,(0.5)^n$ et la question précédente nous fournit l'inégalité $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0.5\,|u_n - \alpha|$ donc $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0.5\,|u_n - \alpha| \leqslant (0.5)0.2\,(0.5)^n = 0.2\,(0.5)^{n+1}$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
5. Nous savons d'après la question précédente que $0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant 0.2\,(0.5)^n \to 0$ donc le théorème d'encadrement montre que $|u_n - \alpha| \to 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.