Exercice 1

1. $M^2 = 2I_3 + M \Leftrightarrow M^2 - M = 2I \Leftrightarrow M(\frac{1}{2}(M-I)) = I$ donc la matrice M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{2}(M-I)$..
2. $PQ = 3I$ donc $P(\frac{1}{3}Q) = I$ donc P est inversible et son inverse est $\frac{1}{3}Q$.
3. si $Y = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \psi \\ \delta & \varepsilon & \phi \\ \gamma & \eta & \iota \end{pmatrix}$ alors $DY - YD = 3Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3\beta & 3\psi \\ -3\delta & 0 & 0 \\ -3\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha & 3\beta & 3\psi \\ 3\delta & 3\varepsilon & 3\phi \\ 3\gamma & 3\eta & 3\iota \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \delta = \varepsilon = \phi = \gamma = \eta = \iota = 0$.

   La matrice Y cherchée est donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \beta & \psi \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4.
   (a) $$MX - XM = 3X \Leftrightarrow PDP^{-1}X - XPDP^{-1} = 3X \underset{\times P^{-1}\text{ à gauche}}{\Leftrightarrow} DP^{-1}X - P^{-1}XPDP^{-1} = 3P^{-1}X$$
   $$\underset{\times P\text{ à droite}}{\Leftrightarrow} D\underbrace{P^{-1}XP}_{=X'} - \underbrace{P^{-1}XP}_{=X'}D = 3\underbrace{P^{-1}XP}_{=X'} \Leftrightarrow DX' - X'D = 3X'.$$

   (b) X est solution de $MX - XM = 3X$ ssi $X' = P^{-1}XP$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \beta & \psi \\ \delta & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc
   $$X = P\begin{pmatrix} 0 & \beta & \psi \\ \delta & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \beta+\gamma+\delta+\psi & -2\frac{a}{b}\beta + \frac{a}{b}\psi + \frac{a}{b}\gamma + \frac{a}{b}\delta & \frac{a}{c}\beta - 2\frac{a}{c}\psi + \frac{a}{c}\gamma + \frac{a}{c}\delta \\ \frac{b}{a}\beta - \frac{b}{a}\delta + \frac{b}{a}\psi & -2\beta - \delta + \psi & \frac{b}{c}\beta - \frac{b}{c}\delta - 2\frac{b}{c}\psi \\ \frac{c}{a}\beta - \frac{c}{a}\gamma + \frac{c}{a}\psi & -2\frac{c}{b}\beta - \frac{c}{b}\gamma + \frac{c}{b}\psi & \beta - \gamma - 2\psi \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. La matrice $A - \lambda I$ est inversible si et seulement si le système (S_λ) : $\begin{cases} x(1-\lambda) + 2z & = 0 \\ \frac{3}{2}x + 6z + y(-2-\lambda) & = 0 \\ \frac{1}{2}x - y + z(\frac{5}{2} - \lambda) & = 0 \end{cases}$ est de Cramer.
   $$(S_\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - y + (\frac{5}{2} - \lambda)z & = 0 \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \frac{3}{2}x + (-2-\lambda)y + 6z & = 0 \\ (1-\lambda)x + 2z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - y + (\frac{5}{2} - \lambda)z & = 0 \\ (1-\lambda)y + 3(\lambda - \frac{1}{2})z & = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ (1-\lambda)y + z(-\lambda^2 + \frac{7}{2}\lambda - \frac{3}{2}) & = 0 \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - y + (\frac{5}{2} - \lambda)z & = 0 \\ (1-\lambda)y + 3(\lambda - \frac{1}{2})z & = 0 \\ \lambda(\frac{1}{2} - \lambda)z & = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$
   Ce dernier est triangulaire et carré donc (S_λ) est de Cramer ssi $1 - \lambda \neq 0$ et $\lambda(\frac{1}{2} - \lambda) \neq 0$ c'est-à-dire $\lambda \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
2. $$B = \alpha U + \beta V + \gamma W \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = x \\ -\frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2}\gamma & = y \\ -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\beta & = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = x \\ 3\beta + 5\gamma & = 4y + 3x \quad L_2 \leftarrow 4L_2 + 3L_1 \\ \frac{1}{2}\beta + \gamma & = 2z + x \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = x \\ 3\beta + 5\gamma & = 4y + 3x \\ \gamma & = 3x - 4y + 12z \quad L_3 \leftarrow 6L_3 - L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = 2x - 4y + 8z \\ \beta & = -4x + 8y - 20z \\ \gamma & = 3x - 4y + 12z \end{cases}$$
3. $AU = 0.U, \quad AV = \frac{1}{2}V, \quad AW = W.$
4. On procède bien entendu par récurrence.
   Posons $(\mathcal{P}_n)$: " il existe un triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $X_n = \alpha_n U + \beta_n V + \gamma_n W$ ".
   Initialisation : La question précédente montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie (on remplace B par X_0).

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vrai.

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n + B = A(\alpha_n U + \beta_n V + \gamma_n W) + \alpha U + \beta V + \gamma W \\ &= \alpha_n AU + \beta_n AV + \gamma_n AW + \alpha U + \beta V + \gamma W = \frac{1}{2}\beta_n V + \gamma_n W + \alpha U + \beta V + \gamma W \\ &= \alpha U + (\frac{1}{2}\beta_n + \beta)V + (\gamma_n + \gamma)W \end{aligned}$$

En choisissant $\alpha_{n+1} = \alpha$, $\beta_{n+1} = \frac{1}{2}\beta_n + \beta$ et $\gamma_{n+1} = \gamma_n + \gamma$, on obtient l'égalité $X_{n+1} = \alpha_{n+1}U + \beta_{n+1}V + \gamma_{n+1}W$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

5. On procède bien entendu par récurrence. Posons
   $(\mathcal{P}_n)$: " $\alpha_n = \alpha, \quad \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\beta_0 - 2\beta) + 2\beta, \quad \gamma_n = \gamma_0 + n\gamma$ "
   Initialisation : La question précédente montre, en choisissant $n = 0$, que $\alpha_1 = \alpha, \quad \gamma_1 = \gamma_0 + \gamma = \gamma_0 + 1.\gamma$ et $\beta_1 = \frac{1}{2}\beta_0 + \beta = \left(\frac{1}{2}\right)^1 (\beta_0 - 2\beta) + 2\beta$
   Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vrai. La question précédente montre que
   $$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha, \quad \gamma_{n+1} = \gamma_n + \gamma = \gamma_0 + n\gamma + \gamma = \gamma_0 + (n+1)\gamma \\ \beta_{n+1} &= \frac{1}{2}\beta_n + \beta = \frac{1}{2}(\left(\frac{1}{2}\right)^n (\beta_0 - 2\beta) + 2\beta) + \beta = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (\beta_0 - \beta) + \beta + \beta = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (\beta_0 - \beta) + 2\beta \end{aligned}$$
   ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

Problème

I Un résultat préliminaire

On remercie le binôme de Newton
$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k 4^{k-1} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k 4^k = \frac{1}{4}(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k 4^k - (-1)^{n-0} C_n^0 4^0) = \frac{1}{4}((4-1)^n - (-1)^n) = \frac{3^n - (-1)^n}{4}$

II Simulation

1. Considérons l'évènement K_n " à l'issue de la $n^{ième}$ opération, le jeton A n'ait jamais quitté C_0 ". L'évènement A_n se réalise si et seulement si le jeton A est resté dans C_0 à tous les instants entre 0 et n : autrement dit, on n'a jamais pioché durant les n tirages consécutifs la lettre a. La probabilité de ne pas tirer la lettre a vaut $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, ce qui nous donne $P(K_n) = (\frac{2}{3})^n$.
2. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on s'interresse à l'événement D_k : à l'issue de la $k^{ième}$ opération, le jeton A revient pour la première fois dans C_0.
   (a) Introduisons l'évènement A_n : " on pioche la lettre a au $n^{ème}$ tirage ". On remarque ces évènements $(A_n)_{n \geqslant 0}$ sont deux à deux disjoints.
   Pour que D_2 se réalise, il est indispensable que l'on choisisse la lettre a au premier tirage (le jeton A es dans l'urne C_1 à la fin de la première opération) puis, au second tirage, le jeton A retourne dans la case C_0, c'est-à-dire que l'on pioche la lettre a. On en déduit immédiatement que $p(D_2) = p(A_1 \cap A_2) = p(A_1)P(A_2) = (\frac{1}{3})^2$.
   Pour que D_3 se réalise, il est indispensable que l'on choisisse la lettre a au premier tirage (le jeton A est dans l'urne C_1 à la fin de la première opération) puis, au second tirage, le jeton A ne peut retourner dans la case C_0, c'est-à-dire que l'on ne pioche pas la lettre a et enfin, au troisième tirage, on doit piocher la lettre a pour faire revenir le jeton A dans la cas C_0. On en déduit immédiatement que $p(D_3) = p(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{2}{27}$.
   (b) Il est immédiat que $p(D_k) = p(A_1 \cap \underbrace{\overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap ..\overline{A_{k-1}}}_{(k-1)-2+1=k-2 \text{ ensembles}} \cap A_k) = p(A_1)p(\overline{A_2})p(\overline{A_3})..p(\overline{A_{k-1}})p(A_k) = (\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^{k-2}$.
3.

(a) Le système associé à P est $\left\{\begin{array}{l} x+y=a \\ -x+y=b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y=a & \\ 2y=a+b & L_2 \leftarrow L_2+L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{2} \\ y=\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2} \end{array}\right.$ donc la matrice P est inversible et son inverse est $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ et un calcul direct montre que $M = PDP^{-1}$

(b) Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $M^n = PD^nP^{-1}$ ".
Initialisation : $M^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vrai.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vrai. $M^{n+1} = M^nM = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nIDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
On en déduit la matrice $M^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$

4.

(a) $(X_1 = 0) = \overline{A_1}$ donc $p(X_1 = 0) = p(\overline{A_1}) = \dfrac{2}{3}$ et $p(X_1 = 1) = 1 - p(X_1 = 0) = \dfrac{1}{3}$.

(b) Considérons le système complet d'évènements $(X_n = 0)$, $(X_n = 1)$. La formule des probabilités totales montre que

$$\left\{\begin{array}{l} p(X_{n+1}=0) = p_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)p(X_n=0) + p_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)p(X_n=1) \\ p(X_{n+1}=1) = p_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)p(X_n=0) + p_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)p(X_n=1) \end{array}\right.$$

- La probabilité conditionnelle $p_{(X_n=i)}(X_{n+1}=i)$ correspond au fait que le jeton A se trouve dans l'urne C_i à l'instant n et reste à l'instant $n+1$ dans la même urne, ce qui signifie que l'on ne pioche pas la lettre a.
- La probabilité conditionnelle $p_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$, avec $i \neq j$, correspond au fait que le jeton A se trouve dans l'urne C_i à l'instant n et elle change d'urne à l'instant $n+1$, ce qui signifie que l'on pioche la lettre a.

Nous en déduison donc les égalités

$$\left\{\begin{array}{l} p(X_{n+1}=0) = \dfrac{2}{3}p(X_n=0) + \dfrac{1}{3}p(X_n=1) \\ p(X_{n+1}=1) = \dfrac{1}{3}p(X_n=0) + \dfrac{2}{3}p(X_n=1) \end{array}\right.$$

ce qui démontre que la matrice cherchée est $Q = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}M$.

En particulier, $Q^n = \dfrac{1}{3^n}M^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{1}{3^n} & 1-\dfrac{1}{3^n} \\ 1-\dfrac{1}{3^n} & 1+\dfrac{1}{3^n} \end{pmatrix}$. On sait que $X_n = Q^nX_0 = Q^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\times 3^n}+\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2\times 3^n}+\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc

$$p(X_n=0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\times 3^n} \quad \text{et} \quad p(X_n=1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\times 3^n}$$

(c) $E(X_n) = 0p(X_n=0) + 1.p(X_n=1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\times 3^n}$
$E(X_n^2) = 0^2p(X_n=0) + 1^2.p(X_n=1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\times 3^n} = E(X_n)$
$V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2 = E(X_n) - (E(X_n))^2 = E(X_n)(1-E(X_n)) = (\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\times 3^n})(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\times 3^n})) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4\times 9^n}$

III Etude d'un mouvement du couple de jetons (A, B)

1. L'évènement $(W_1 = 0)$ se réalise seulement si l'on a pioché la lettre c donc $p(W_1 = 0) = \dfrac{1}{3}$.

   L'évènement $(W_1 = 1)$ se réalise seulement si l'on a pioché la lettre b donc $p(W_1 = 0) = \dfrac{1}{3}$.

L'évènement $(W_1 = 2)$ se réalise seulement si l'on a pioché la lettre a donc $p(W_1 = 0) = \dfrac{1}{3}$.
L'évènement $(W_1 = 3)$ est impossible donc $p(W_1 = 0) = 0$.

2. Considérons le système complet d'évènements $(W_n = 0)$, $(W_n = 1)$, $(X_n = 2)$, $(W_n = 3)$. La formule des probabilités totales montre que, pour tout entier $k \in [\![0, 3]\!]$

$$p(W_{n+1} = k) = \sum_{j=0}^{3} p_{(W_n=j)}(W_{n+1} = k)p(W_n = j)$$

– La probabilité conditionnelle $p_{(W_n=0)}(W_{n+1} = 0)$ correspond au fait que les jetons A et B se trouvent dans l'urne C_0 à l'instant n et ils restent, à l'instant $n + 1$, dans la même urne, ce qui signifie que l'on pioche la lettre a donc $p_{(W_n=0)}(W_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{3}$.
– La probabilité conditionnelle $p_{(W_n=1)}(W_{n+1} = 0)$ correspond au fait, qu'à l'instant n, le jeton A est dans l'urne C_0 et le jeton B se trouvent dans l'urne C_1 puis, à l'instant $n + 1$, les jetons A et B sont dans l'urne C_0, ce qui signifie que l'on pioche la lettre b donc $p_{(W_n=1)}(W_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{3}$.
– La probabilité conditionnelle $p_{(W_n=2)}(W_{n+1} = 0)$ correspond au fait, qu'à l'instant n, le jeton A est dans l'urne C_1 et le jeton B se trouvent dans l'urne C_0 puis, à l'instant $n + 1$, les jetons A et B sont dans l'urne C_0, ce qui signifie que l'on pioche la lettre a donc $p_{(W_n=2)}(W_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{3}$.
– La probabilité conditionnelle $p_{(W_n=3)}(W_{n+1} = 0)$ correspond au fait que les jetons A et B se trouvent dans l'urne C_1 à l'instant n et ils sont, à l'instant $n + 1$, dans l'urne C_0 ce qui est impossible donc $p_{(W_n=3)}(W_{n+1} = 0) = 0$.

Par le même type de raisonnement, on obtient au final que R est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à $\dfrac{1}{3}$ sauf ceux situés sur l'antidiagonale qui sont nuls.

3.

(a) $UV = V, \quad VU = V, \quad U^2 = 4U, \quad V^2 = I.$

(b) Posons $(\mathcal{P}_k)$: " $U^kV = U^k$ ".
Initialisation : $U^1V = UV = U = U^1$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vrai.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vrai. $U^{k+1}V = U^kUV = U^kU = U^{k+1}$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{r+1})$ et achève la récurrence.

(c) Posons $(\mathcal{P}_r)$: " $U^kV^r = U^k$ ".
Initialisation : $U^kV^0 = U^kI = U^k$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vrai.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_r)$ est vrai. $U^kV^{r+1}U^kV^rV \underset{(\mathcal{P}_r)}{=} U^kV \underset{3.b}{=} U^k$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{k+1})$ et achève la récurrence.

(d) Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $U^n = 4^{n-1}U,$ ".
Initialisation : $4^{1-1}U = U = U^1$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vrai.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vrai. $U^{n+1} = U^nU = 4^{n-1}UU = 4^{n-1}4U = 4^nU$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(e) $V^{2n} = (V^2)^n = I^n = I$ et $V^{2n+1} = V^{2n}V = IV = V$.

(f) Puisque $VU = U = UV$, les matrices commutent donc la formule du binôme montre que

$$(U - V)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k U^k V^{n-k}.$$

(g)
$$\begin{aligned}(U - V)^n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k U^k V^{n-k} = (-1)^{n-0} C_n^0 U^0 V^{n-0} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k U^k V^{n-k} \\ &= (-1)^n V^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k U^k \text{ (cf. 3.}c) = (-1)^n V^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k 4^{k-1} U \text{ (cf. 3.}d) \\ &= (-1)^n V^n + \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k 4^{k-1}\right) U = (-1)^n V^n + \frac{1}{4}\left[3^n - (-1)^n\right] U \text{ (cf. préliminaire)}\end{aligned}$$

4.

(a) $R = \dfrac{1}{3}(U - V)$ donc $R^n = \dfrac{1}{3^n}(U - V)^n$. Les questions 3.$e$) et 3.$g$ montre que

$$R^{2n} = I_4 + \frac{1}{4}(3^{2n} - 1)U \quad \text{et} \quad R^{2n+1} = -V + \frac{1}{4}(3^{2n+1} + 1)U$$

(b) En remarquant que

$$\begin{pmatrix} p(W_n=0) \\ p(W_n=1) \\ p(W_n=2) \\ p(W_n=3) \end{pmatrix} = R^n \begin{pmatrix} p(W_0=0) \\ p(W_0=1) \\ p(W_0=2) \\ p(W_0=3) \end{pmatrix} = \frac{1}{3^n}(U-V)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on obtient que
$p(W_{2n}=0) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4.3^{2n}}$ et $p(W_{2n}=1) = p(W_{2n}=2) = p(W_{2n}=3) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4.3^{2n}}$
$p(W_{2n+1}=0) = p(W_{2n+1}=1) = p(W_{2n+1}=2) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4.3^{2n+1}}$ et $p(W_{2n+1}=3) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4.3^{2n+1}}$