Exercice 1

1. La probalité d'obtenir deux piles (resp. deux faces) est égal à $\dfrac{1}{4}$ donc $P(K_1) = \dfrac{1}{4}$.
2. $P(\overline{K_1} \cap P_2) = P(\overline{K_1})P_{\overline{K_1}}(K_2) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4}$.
3. $P(\overline{K_1} \cap \overline{P_2} \cap K_3) = P(\overline{K_1})P_{\overline{K_1}}(\overline{P_2})P_{\overline{K_1}\cap\overline{P_2}}(K_3) = (\dfrac{3}{4})^2 \times \dfrac{1}{4}$.
4. $k_n = P(\overline{K_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{K_3} \cap \overline{P_4} \cap .. \cap \overline{K_{2n-1}} \cap \overline{P_{2n}} \cap K_{2n+1}) = (\dfrac{3}{4})^{2n} \times \dfrac{1}{4}$.
5. $p_n = P(\overline{K_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{K_3} \cap \overline{P_4} \cap ..\overline{K_{2n-3}} \cap \overline{P_{2n-2}} \cap \overline{K_{2n-1}} \cap P_{2n}) = (\dfrac{3}{4})^{2n-1} \times \dfrac{1}{4}$.
6. Soit A "un joueur gagne avant le $4^{ème}$ coup " alors
$A = K_1 \cup (\overline{K_1} \cap P_2) \cup (\overline{K_1} \cap \overline{P_2} \cap K_3)$
La réunion étant disjointe, on obtient $P(A) = \sum_{k=0}^{2} (\dfrac{3}{4})^k \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{111}{256}$
7. $P_A(K_1 \cup (\overline{K_1} \cap \overline{P_2} \cap K_3)) = P_A(K_1) + P_A(\overline{K_1} \cap \overline{P_2} \cap K_3)$ (la réunion étant disjointe).
$P_A(K_1) = \dfrac{P(A \cap K_1)}{P(A)} = \dfrac{P(K_1)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{111}{256}} = \dfrac{64}{111}$
$P_A(\overline{K_1} \cap \overline{P_2} \cap K_3) = \dfrac{P(A \cap (\overline{K_1} \cap \overline{P_2} \cap K_3))}{P(A)} = \dfrac{P(\overline{K_1} \cap \overline{P_2} \cap K_3)}{P(A)} = \dfrac{(\frac{3}{4})^2 \times \frac{1}{4}}{\frac{111}{256}} = \dfrac{12}{37}$
Ainsi $P_A(K_1 \cup (\overline{K_1} \cap \overline{P_2} \cap K_3)) = \dfrac{64}{111} + \dfrac{12}{37} = \dfrac{100}{111}$.

Exercice 2

On pose B_k (resp. R_k) : "obtenir une boule blanche (resp. rouge) à la $k^{ème}$ pioche "

1. Loi de X_2
   (a) $(X_2 = 0) = R_1 \cap R_2$, $(X_2 = 1) = (R_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap R_2)$,
   $(X_2 = 2) = B_1 \cap B_2$
   (b) $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
   $P(X_2 = 0) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$
   $P(X_2 = 1) = P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap R_2) = P(R_1)P_{R_1}(B_2) + P(B_1)P_{B_1}(R_2)$
   $= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$
   $P(X_2 = 2) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.
   $E(X_2) = 0 \times \dfrac{1}{3} + 1 \times \dfrac{1}{3} + 2 \times \dfrac{1}{3} = 1$,
   $E(X_2^2) = 0^2 \times \dfrac{1}{3} + 1^2 \times \dfrac{1}{3} + 2^2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$ donc $V(X_2) = \dfrac{5}{3} - 1^2 = \dfrac{2}{3}$.
2. Loi de X_3
   (a) $P(X_3 = 0) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1\cap R_2}(R_3) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$
   $P(X_3 = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(B_3) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$
   (b) $P(X_3 = k) = \sum_{j=0}^{2} P[(X_2 = j) \cap (X_3 = k)] = \sum_{j=0}^{2} P(X_2 = j)P_{(X_2=j)}(X_3 = k)$.
   Calcul de $P_{(X_2=0)}(X_3 = 1)$
   On constate que l'on a obtenu aucune boule blanche durant les deux premiers tirages et on souhaite obtenir une boule blanche dans les trois premiers tirages. Nous disposons donc de 3 boules rouges et de 1 boule blanche à l'issue de la deuxième pioche et on obtient une boule blanche au troisième tirage donc $P_{(X_2=0)}(X_3 = 1) = \dfrac{1}{4}$.
   Calcul de $P_{(X_2=1)}(X_3 = 1)$
   On constate que l'on a obtenu une boule blanche durant les deux premiers tirages et on souhaite obtenir une boule blanche dans les trois premiers tirages. Nous disposons donc de 2 boules rouges et de 2 boules blanches à l'issue de la deuxième pioche et on obtient une boule rouge au troisième tirage donc $P_{(X_2=1)}(X_3 = 1) = \dfrac{2}{4}$.
   Calcul de $P_{(X_2=2)}(X_3 = 1)$
   On constate que l'on a obtenu deux boules blanches durant les deux premiers tirages et on souhaite obtenir une boule blanche dans les trois premiers tirages, ce qui est impossible donc $P_{(X_2=2)}(X_3 = 1) = 0$.
   Calcul de $P_{(X_2=0)}(X_3 = 2)$

On constate que l'on a obtenu aucune boule blanche durant les deux premiers tirages et on souhaite obtenir deux boules blanches dans les trois premiers tirages, ce qui est impossible donc $P_{(X_2=0)}(X_3 = 2) = 0$.

Calcul de $P_{(X_2=1)}(X_3 = 2)$

On constate que l'on a obtenu une boule blanche durant les deux premiers tirages et on souhaite obtenir deux boules blanches dans les trois premiers tirages. Nous disposons donc de 2 boules rouges et de 2 boules blanches à l'issue de la deuxième pioche et on obtient une boule blanche au troisième tirage donc $P_{(X_2=0)}(X_3 = 1) = \dfrac{2}{4}$.

Calcul de $P_{(X_2=2)}(X_3 = 2)$

On constate que l'on a obtenu deux boules blanches durant les deux premiers tirages et on souhaite obtenir deux boules blanches dans les trois premiers tirages. Nous disposons donc de 1 boules rouges et de 3 boules blanches à l'issue de la deuxième pioche et on obtient une boule rouge au troisième tirage donc $P_{(X_2=0)}(X_3 = 1) = \dfrac{1}{4}$.

Ainsi, on a $P(X_3 = 1) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{3} \times 0 = \dfrac{3}{3 \times 4} = \dfrac{1}{4}$

$P(X_3 = 2) = \dfrac{1}{3} \times 0 + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{3 \times 4} = \dfrac{1}{4}$

3. Loi de X_n lorsque $n \geqslant 2$.

(a) $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$

$P(X_n = 0) = P(R_1 \cap .. \cap R_n) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)..P_{R_1 \cap .. \cap R_{n-1}}(R_n)$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times .. \times \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

(b) On rajoute une et une seule boule après chaque tirage et que cette boule est soit rouge, soit blanche. Si l'on veut obtenir k boules blanches durant les n tirages, il est indispensable d'avoir obtenu k boules blanches durant les $(n-1)$ premiers tirages (donc le $n^{ème}$ tirage donne une boule rouge) ou l'on a obtenu $k-1$ boules blanches durant les $(n-1)$ premiers tirages (donc le $n^{ème}$ tirage fournit une boule blanche). On en déduit que

$$(X_n = k) = [(X_n = k) \cap (X_{n-1} = k-1)] \cup P[(X_n = k) \cap (X_{n-1} = k)]$$

La réunion étant disjointe, on en déduit que

$$P(X_n = k) = P[(X_n = k) \cap (X_{n-1} = k-1)] + P[(X_n = k) \cap (X_{n-1} = k)]$$

(c) Calcul de $P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k)$

On a obtenu $k-1$ boules blanches durant les $(n-1)$ premiers tirages et on souhaite obtenir k boules blanches dans les n premiers tirages. Nous disposons donc de $(k-1)+1 = k$ boules blanches et de $(n+1)-k = n-k+1$ boules rouges à l'issue de la $(n-1)^{ème}$ pioche (qui compte $2+(n-1) = n+1$ boules) et on obtient une boule blanche au $n^{ème}$ tirage donc $P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k) = \dfrac{k}{n+1}$.

Calcul de $P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k)$

On a obtenu k boules blanches durant les $(n-1)$ premiers tirages et on souhaite obtenir k boules blanches dans les n premiers tirages. Nous disposons donc de $k+1$ boules blanches et de $(n+1)-(k+1) = n-k$ boules rouges à l'issue de la $(n-1)^{ème}$ pioche (qui compte $2+(n-1) = n+1$ boules) et on obtient une boule rouge au $n^{ème}$ tirage donc $P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k) = \dfrac{n-k}{n+1}$.

(d) Posons $(\mathcal{H}_n)$: " $\forall k \in [[1, n]], \quad P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$ "

Initialisation : $(\mathcal{H}_2)$ est vraie car $P(X_2 = 1) = P(X_2 = 2) = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2+1}$.

Hérédité : supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie. La question (3b) montre que pour $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} &= k) = P(X_n = k-1)P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k) + P(X_n = k)P_{(X_n=k)}(X_{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{k}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1-k}{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Pour finir, $P(X_{n+1} = n+1) = 1 - \sum\limits_{k=0}^{n} P(X_{n+1} = k) = 1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n+2} = 1 - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$.

Conclusion : $(\mathcal{H}_n)$ est vraie quelque soit $n \geqslant 2$.

(e) $E(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} kP(X_n = k) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n}{2}$.

$E(X_n^2) = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 P(X_n = k) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k^2}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} k^2$

$= \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{n(2n+1)}{6}$.

$V(X_n) = \dfrac{n(2n+1)}{6} - (\dfrac{n}{2})^2 = \dfrac{1}{6}n + \dfrac{1}{12}n^2 = \dfrac{n(n+2)}{12}$