Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. On pose (P_n) : " $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ "
   Initialisation : (P_0) est vraie car l'énoncé affirme que $u_0 = 0 \in [0,2]$
   Hérédité : Supposons que (P_n) est vraie. On a
   $\sqrt{2} \leqslant \underbrace{\sqrt{2+u_n}}_{=u_{n+1}} \leqslant \sqrt{2+2} = 2$ ce qui démontre (P_{n+1}).
   Conclusion : $\forall n \geqslant 0, \quad (P_n)$ est vraie.
2. On sait déjà que $u_{n+1} \leqslant 2$ donc $2 - u_{n+1} \geqslant 0$. Il reste à démontrer l'autre inégalité, ce que nous allons faire en utilisant la quantité conjuguée.
   $2 - u_{n+1} = 2 - \sqrt{2+u_n} = \dfrac{4-(2+u_n)}{2+\sqrt{2+u_n}} = \dfrac{2-u_n}{2+\sqrt{2+u_n}}$. Or $2+\sqrt{2+u_n} \geqslant 2+\sqrt{2} \geqslant 3$ donc $2 - u_{n+1} = \dfrac{2-u_n}{2+\sqrt{2+u_n}} \leqslant \dfrac{1}{3}(2-u_n)$.
3. Nous avons déjà remarquer que $0 \leqslant 2 - u_n$ donc il suffit de démontrer l'autre inégalité. On pose (P_n) : " $2 - u_n \leqslant \dfrac{2}{3^n}$ "
   Initialisation : (P_0) est vraie car $2 - u_0 = 2 \leqslant \dfrac{2}{3^0}$
   Hérédité : Supposons que (P_n) est vraie. On a $2 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{3}(2-u_n) \leqslant \dfrac{1}{3}\dfrac{2}{3^n} = \dfrac{2}{3^{n+1}}$ ce qui démontre (P_{n+1}).
   Conclusion : $\forall n \geqslant 0, \quad (P_n)$ est vraie.
4. $\dfrac{2}{3^n} \to 0$ et l'inégalité démontrée à la question précédente combinée au théorème d'encadrement montre $2 - u_n \to 0$ donc la suite u converge vers 2.

Exercice 2

1. $f'(t) = \ln(1+\dfrac{x}{t}) + t\dfrac{-\dfrac{x}{t^2}}{1+\dfrac{x}{t}} = \ln(1+\dfrac{x}{t}) - \dfrac{x}{t+x}$
   $f''(t) = \dfrac{-\dfrac{x}{t^2}}{1+\dfrac{x}{t}} + \dfrac{x}{(x+t)^2} = -\dfrac{x}{t(t+x)} + \dfrac{x}{(x+t)^2} = \dfrac{x}{(x+t)}(-\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{x+t}) = \dfrac{-x^2}{t(x+t)^2}$.
2. La fonction f'' est négative sur $]0,+\infty[$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t) = 0$ donc f' est positive sur $]0,+\infty[$ et la fonction f est croissante sur $]0,+\infty[$.
3. On pose la fonction $g(y) = \ln(1+y) - y$. $g'(y) = \dfrac{1}{1+y} - 1 = \dfrac{-y}{1+y} \leqslant 0$ sur $[0,+\infty[$.
   La fonction g est décroissante et $g(0) = 0$ donc la fonction g est négative sur $[0,+\infty[$ ce qui démontre la seconde inégalité.
   Posons maintenant $h(y) = \ln(1+y) - y + \dfrac{y^2}{2}$. $h'(y) = \dfrac{1}{1+y} - 1 + y = \dfrac{y^2}{1+y} \geqslant 0$ sur $[0,+\infty[$.
   La fonction h est croissante et $h(0) = 0$ croissante donc la fonction h est positive sur $[0,+\infty[$ ce qui démontre la première inégalité.
4. En remplaçant y par $\dfrac{x}{t}$ dans la double inégalité précédente, on obtient
   $\forall t > 0, \dfrac{x}{t} - \dfrac{x^2}{2t^2} \leqslant \ln(1+\dfrac{x}{t}) \leqslant \dfrac{x}{t}$ donc $\forall t > 0, \quad x - \dfrac{x^2}{2t} \leqslant f(t) \leqslant x$.
   On remarque que $\lim\limits_{t\to+\infty} x - \dfrac{x^2}{2t} = x$ et l'application du théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = x$
5. La fonction f est croissante et $\ln u_n = n\ln(1+\dfrac{x}{n}) = f(n)$ donc $f(n) \leqslant f(n+1) \Rightarrow \ln u_n \leqslant \ln u_{n+1}$. La suite $\ln u$ est croissante donc la suite u est croissante. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = x$ donc $u_n \to e^x$.

Exercice 3

1. a) Les discriminants sont négatifs au sens large donc les trinômes sont du signe de $\dfrac{1}{3}$ c'est-à-dire positifs.
   b) La première inégalité découle de la positivité du trinôme considéré. Le signe de $(\dfrac{1}{3}x^2 - x + 3) - 3$ est celui de $\dfrac{1}{3}x(x-3)$ qui est négatif sur $[0,3]$.
   c) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}u_n^2 - 2u_n + 3 \geqslant 0$ d'après la question a) donc la suite u est croissante.
2. a) On pose (P_n) : " $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ "
   Initialisation : (P_0) est vraie car $u_0 \in [0,3]$
   Hérédité : Supposons que (P_n) est vraie. Ainsi on a $0 \leqslant \dfrac{1}{3}u_n^2 - u_n + 3 \leqslant 3$ d'après la question 1.b) donc $u_{n+1} \in [0,3]$ ce qui démontre (P_{n+1}).

Conclusion : $\forall n \geqslant 0, \quad (P_n)$ est vraie.

b) La suite u est croissante et majorée par 3 donc elle converge. Soit l sa limite, on a $0 \leqslant l \leqslant 3$ et $l = \frac{1}{3}l^2 - l + 3 \Leftrightarrow l = 3$ donc la suite u converge vers 3.

3. a) La question 1.c) montre que la suite est croissante donc tous les termes de la suite sont supérieurs au terme initial.

   b) Soit l une limite éventuelle de u. On a $l \geqslant u_0$ et $l = \frac{1}{3}l^2 - l + 3 \Leftrightarrow l = 3$ donc $3 \geqslant u_0$ ce qui est absurde. La suite u ne possède pas de limite éventuelle donc elle ne peut pas converger (elle diverge).

4. On cherche un réel a tel que la suite $\alpha_n = w_n - a$ soit géométrique.
   $\alpha_{n+1} = w_{n+1} - a = 2w_n - \ln 3 - a = 2(\alpha_n + a) - \ln 3 - a = 2\alpha_n + a - \ln 3$.
   La suite α est géométrique ssi $a = \ln 3$ et dans ce cas sa raison est 2 ce qui nous donne $\alpha_n = 2^n\alpha_0$ avec $\alpha_n = w_n - \ln 3$. Nous avons donc $w_n = 2^n(w_0 - \ln 3) + \ln 3$.

5. a) $v_n = u_n - 3$ donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n^2 - u_n = \frac{1}{3}(v_n+3)^2 - (v_n+3) = \frac{1}{3}v_n^2 + v_n$.

   b) $v_{n+1} \geqslant \frac{1}{3}v_n^2$ donc $\ln v_{n+1} \geqslant \ln(\frac{1}{3}v_n^2) = 2\ln v_n - \ln 3$

   c) On pose (P_n) : " $\ln v_n \geqslant w_n$ "

   Initialisation : (P_0) est vraie car $\ln v_0 = w_0$.

   Hérédité : Supposons que (P_n) est vraie. On sait que $\ln v_{n+1} \geqslant 2\ln v_n - \ln 3 \geqslant 2w_n - \ln 3 = w_{n+1}$ ce qui démontre (P_{n+1}).

   Conclusion : $\forall n \geqslant 0, \quad (P_n)$ est vraie.

   d) Puisque $w_n = 2^n(w_0 - \ln 3) + \ln 3 = 2^n(\ln(u_0 - 3) - \ln 3) + \ln 3$ et que $\ln(u_0 - 3) > \ln(6-3) = \ln 3$, on en déduit que $w_n \to +\infty$. L'inégalité $\ln v_n \geqslant w_n$ nous montre alors que $\ln v_n \to +\infty$ donc $v_n = u_n - 3 \to +\infty$ ce démontre que $u_n \to +\infty$.

Exercice 4

1. a) Calculer $a_1 = \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{1+k} = 1, \quad a_2 = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{2+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

   b) On effectue dans $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1+k}$ le changement de variable $j = k+1$ ce qui nous donne
   $a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n+j} = a_n + \frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n} - \frac{1}{n}$
   $= a_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = a_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}$.
   $a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{2n(2n+1)} \leqslant 0$ donc la suite a est décroissante.

   c) a_n est la somme de termes positifs donc $a_n \geqslant 0$ donc la suite a est minorée par 0 et elle est décroissante donc elle converge

2. a) $\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) - \ln x = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{x}) = 0$.

   On pose $f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x}$.

   $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x(x+1) + (x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)} \geqslant 0$ sur $]0, +\infty[$. La fonction f est croissante sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est négative sur $]0, +\infty[$ ce qui démontre la seconde inégalité.

   On pose $g(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$.

   $g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)} \leqslant 0$ sur $]0, +\infty[$. La fonction g est décroissante sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Ainsi la fonction g est positive sur $]0, +\infty[$ ce qui démontre la première inégalité.

   b) En remplaçant x par $n+k$ dans l'encadrement précédent, on obtient
   $\frac{1}{n+k+1} \leqslant \ln(n+k+1) - \ln(n+k) \leqslant \frac{1}{n+k}$
   donc $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} (\ln(n+k+1) - \ln(n+k)) \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k}$

   c) Le principe des dominos montre que
   $\sum_{k=0}^{n-2} (\ln(n+k+1) - \ln(n+k)) = \ln(n+n-2+1) - \ln(n+0)$
   $= \ln(2n-1) - \ln n = \ln(\frac{2n-1}{n}) = \ln(2 - \frac{1}{n})$.

   d) $a_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k}$ et le changement de variable $j = k-1 \Leftrightarrow k = j+1$ nous donne $a_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k+1}$. D'autre part, il est immédiat que $a_n - \frac{1}{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k}$.

   e) Les deux questions précédentes montrent que
   $a_n - \frac{1}{n} \leqslant \ln(2 - \frac{1}{n}) \Rightarrow a_n \leqslant \ln(2 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}$ et

$\ln(2-\frac{1}{n}) \leqslant a_n - \frac{1}{2n-1} \Rightarrow \ln(2-\frac{1}{n}) + \frac{1}{2n-1} \leqslant a_n$
donc $\ln(2-\frac{1}{n}) + \frac{1}{2n-1} \leqslant a_n \leqslant \ln(2-\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}$

On remarque ensuite que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2-\frac{1}{n}) + \frac{1}{2n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2-\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} = \ln 2$ donc le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ln 2$.