Corrigé exercice 1 :

$\exp(-(2\ln 3)/2) = \exp(-\ln 3) = \dfrac{1}{3} \Rightarrow u(2\ln 3) = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{3}(1-\dfrac{1}{3})^2 = \dfrac{2}{9}$

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})^2 + \frac{3}{2}e^{-t/2}\times 2(\frac{1}{2}e^{-t/2})(1-e^{-t/2}) \\ &= \frac{3}{2}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})\left(-\frac{1}{2}(1-e^{-t/2})+e^{-t/2}\right) = \frac{3}{2}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})\left(\frac{3}{2}e^{-t/2}-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})(3e^{-t/2}-1) \end{aligned}$$

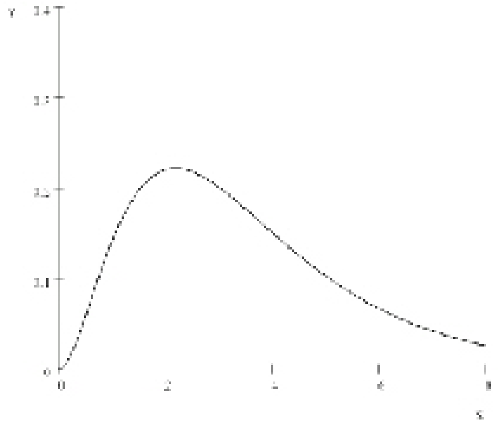
Ainsi $u'(t) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 1-e^{-t/2}=0 \\ \text{ou} \\ 3e^{-t/2}-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} e^{-t/2}=1 \\ \text{ou} \\ e^{-t/2}=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -\dfrac{t}{2}=\ln 1 = 0 \\ \text{ou} \\ -\dfrac{t}{2}=\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\ln 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} t=0 \\ \text{ou} \\ t=2\ln(3) \end{array}\right.$

La fonction $t\mapsto 1-e^{-t/2}$ est croissante et la fonction $t\mapsto 3e^{-t/2}-1$ est décroissante d'où le tableau de variation ci-dessous.

On sait que $e^{-t/2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} u = 0$

$u(0)=0$ et $u'(0)=0$ donc $y=0$ est l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

t	0		$2\ln 3$		$+\infty$
$\frac{3}{4}e^{-t/2}$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$1-e^{-t/2}$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$3e^{-t/2}-1$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$u'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$u(t)$	0	$\nearrow$	$2/9$	$\searrow$	0



Corrigé exercice 2 :

1. On pose $X = e^{-x} > 0$, ce qui nous donne $e^x - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow X - \dfrac{1}{X} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{X^2-1}{X} > 0$.
   Puisque $X>0$, $\dfrac{X^2-1}{X} > 0 \Leftrightarrow X^2 > 1 \Leftrightarrow X > 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ donc $D = \mathbb{R}_+^{\times}$
2. a) $f'(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} > 0$ car le numérateur est bien entendu positif et le dénominateur également puisque $\ln(e^x-e^{-x})$ est définie. La fonction f est croissante.
   Lorsque $x\to+\infty$, $e^x\to+\infty$ et $e^{-x}\to 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   Lorsque $x\to 0^+$, e^x et e^{-x} tendent vers 1 donc $e^x-e^{-x}\to 0$ et $\ln x \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\infty$ donc $f(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\infty$.

   On résume ceci dans le tableau de variation ci-contre :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

   b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x-e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 1$. On effectue de nouveau le changement de variable $X = e^x > 0$ ce qui nous amène à l'équation $X - \dfrac{1}{X} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{X^2-1}{X} = 1 \Leftrightarrow X^2 - X - 1 = 0$.

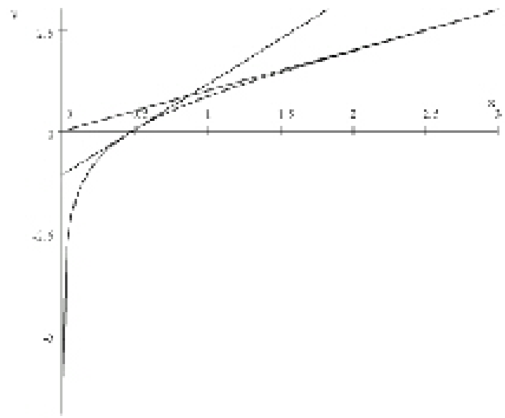
Les racines de ce trinôme sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>0$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ donc la seule solution qui nous convient est $X=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ d'où $e^x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x=\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ et ainsi $\alpha=\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

c) Le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse α est $f'(\alpha)=\dfrac{e^\alpha+e^{-\alpha}}{e^\alpha-e^{-\alpha}}$. On sait que $f(\alpha)=0$ donc $e^\alpha-e^{-\alpha}=1$ ce qui montre que $f(\alpha)=e^\alpha+e^{-\alpha}=e^\alpha+\dfrac{1}{e^\alpha}$.
D'autre part $e^\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}\\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2-2\sqrt{5}}{-4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}\end{aligned}$$

L'équation de la tangente est donc $y=\sqrt{5}(x-\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right))$

3. a) $f(x)-x=\ln(e^x-e^{-x})-\ln x=\ln\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x}\right)=\ln(1-e^{-2x})\underset{x\to+\infty}{\to}0$
b) La droite $y=x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
c) D'une part, on a l'égalité $f(x)-x=\ln(1-e^{-2x})<\ln 1<0$ donc l'asymptote Δ est située en dessous de la courbe (C) sur D.
Vous trouverez ci_contre la représentation graphique de f, ainsi que la tangente (T) et (Δ)



Corrigé problème :

1. a) La fonction f est définie ssi $1-2y>0\Leftrightarrow y<\dfrac{1}{2}$.
b)
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y\exp[(x-1)\ln(1-2y)]+xy\ln(1-2y)\exp[(x-1)\ln(1-2y)]\\ &= y\exp[(x-1)\ln(1-2y)]\underbrace{(1+x\ln(1-2y))}_{a(x,y)}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\exp[(x-1)\ln(1-2y)]+xy\left(\frac{-2(x-1)}{1-2y}\right)\exp[(x-1)\ln(1-2y)]\\ &= x\exp[(x-1)\ln(1-2y)]\left(1-\frac{2y(x-1)}{1-2y}\right)=x\exp[(x-1)\ln(1-2y)]\frac{1-2yx}{1-2y}\\ &= \frac{x}{1-2y}\exp[(x-1)\ln(1-2y)]\underbrace{(1-2yx)}_{b(x,y)}\end{aligned}$$
c) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\Leftrightarrow(x=0 \text{ ou } 2yx=1)\Leftrightarrow\left(x=0 \text{ ou } y=\dfrac{1}{2x}\right)$. Il s'agit donc de la réunion d'une hyperbole et d'une droite.

2. Si on pose $f(t)=\ln(1-t)+t$, on a $f'(t)=-\dfrac{1}{1-t}+1=\dfrac{t}{t-1}<0$ sur $[0,1[$ donc la fonction f est décroissante sur $[0,1[$ et $f(0)=0$. On en déduit immédiatement que $\forall t\in]0,1[,\quad f(t)<0\Leftrightarrow\ln(1-t)<-t$.

3. a)

$h(x)$ est définie ssi $1-\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}>0$.
On dresse le tableau de signe ci-contre ce qui montre que $\mathcal{D}_h =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x-1)/x$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Si $x>1$, $-\frac{1}{x}<0$ donc $\ln(1-\frac{1}{x})<\ln 1=0$.
Si $x<0$, $-\frac{1}{x}>0$ donc $\ln(1-\frac{1}{x})>\ln 1=0$.
On en déduit le tableau de signe de h ci-contre donc la fonction h est toujours négative

x	$-\infty$		0	1		$+\infty$
$x-1$		$-$	$\vert$	0	$+$	
$\ln(1-1/x)$		$+$	0	$\vert$	$-$	
$h(x)$		$-$	$\Vert$	0	$-$	

b) $h'(x)=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+(x-1)\dfrac{\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x}+1}=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}<0.$

Puisque $x>1$, $\frac{1}{x}\in]0,1[$ donc $h'(x)<0$ d'après la question 2 et la fonction h est décroissante sur $]1,+\infty[$.
c) $X=x-1 \Leftrightarrow x=X+1$.

$$\begin{aligned} h(x) &= (x-1)\ln(1-\frac{1}{x}) = X\ln(1-\frac{1}{X+1}) = X\ln(\frac{X}{X+1}) = X\left(\ln X - \ln(X+1)\right) \\ &= \underbrace{X\ln X}_{\to 0} - \underbrace{X}_{\to 0}\underbrace{\ln(X+1)}_{\to 0} \to 0 \text{ quand } X\to 0^+ \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=0$. Puisque h est décroissante, on retrouve que h est négative sur $]1,+\infty[$.

4. a) $g(y)=ny\exp[(n-1)\ln(1-2y)]=ny\exp[\ln(1-2y)^{n-1}]=ny(1-2y)^{n-1}$.
b) $\begin{aligned}[t] g'(y) &= n(1-2y)^{n-1}-2n(n-1)y(1-2y)^{n-2}=(1-2y)^{n-2}\left[n(1-2y)-2n(n-1)y\right] \\ &= (1-2y)^{n-2}\left[-2n^2y+n\right]=n(1-2y)^{n-2}(-2ny+1)\end{aligned}$

Puisque $1-2y>0$, $g'(y)=0 \Leftrightarrow -2ny+1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2n}$.
c)

Puisque $1-2y>0$, le signe de $g'(y)$ est celui de $-2ny+1$. On en déduit le tableau de variation de g ci-contre.
La fonction g est donc maximal en $\frac{1}{2n}$ et sa valeur en ce point est
$g(\frac{1}{2n})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$

y	0		$1/(2n)$		$\frac{1}{2}$
$-2ny+1$		$+$	0	$-$	
$g'(y)$		$+$	0	$-$	
$g(y)$	0	$\nearrow$	$g(1/(2n))$	$\searrow$	0