La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 4 pages et de quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1 (EML 2003)

On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier : $A^3 = A^2 + 2A$.
2. Déterminer tous les réels x, y tels que $xA + yA^2 = 0_3$.
3. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il esiste un couple unique (a_n, b_n) de nombres réels tel que : $A^n = a_nA + b_nA^2$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
4.
   (a) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$
   (b) En déduire a_n et b_n en fonction de n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
   (c) Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Exercice 2 (Ecricome 2002)

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.
On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec $c \geqslant 1$ boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).
On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{ème} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.
6. Soit $p \leqslant n - 1$.
   (a) Déterminer $P(X_{p+1} = 1 / Z_p = k)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
   $$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}.$$
   (c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   (On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1, X_2, ..., X_p étant supposées suivre une loi de de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).

Exercice 3 (EML 2002)

1. Etude préliminaire

   On admet, pour tout entier naturel k et tout réel x de $[0;1[$, que la série $\sum\limits_{n\geqslant k} C_n^k x^n$ est convergente et on note $s_k(x) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n$.

   (a) Vérifier, pour tout réel x de $[0;1[$:

   $$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \text{ et } s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

   (b) Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tel que $k < n$, montrer :

   $$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

   (c) Pour tout entier naturel k et tout réel x de $[0;1[$, déduire de la question précédente :

   $$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x).$$

   (On commencera par traiter le membre de droite)

   (d) Montrer, par récurrence :

   $$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

2. Etude d'une expérience aléatoire.

   On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

   - On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
     On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
   - Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
     On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^\times$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k/N = n)$.

   (c) Vérifier : $P(X = 0) = \dfrac{4}{9}$.

   (d) En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

   $$\forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad P(X = k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

   (e) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.

   (f) Montrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X \leqslant k) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.

Exercice 4 (EDHEC 2003)

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : "le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie".
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.
   (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$.
   (b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.
   (c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$.

   Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

2.
   (a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.
   (b) Justifier que $M = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on déterminera.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3.
   (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.
   (b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2, \quad U_n = M^{n-2}U_2$.
   (c) En déduire $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$ en fonction de $P(E_2)$, $P(F_2)$, $P(G_2)$ et $P(H_2)$
   (d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(F_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}$$