
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 5 pages et de quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat. Il y a un exercice par page.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1 (Edhec 2002)

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2} & \forall x > 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$

1. (a) Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Etudier le signe de $f(x)$.

2. Montrer que l'on définit bien une fonction F sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

3. Pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on pose $g(x) = F(x) - x$.

   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour $x > 0$, on peut écrire $g'(x)$ sous la forme $g'(x) = \dfrac{-xh(x)}{1+x^2}$.

   (b) Etudier les variations de h, puis en déduire son signe (on donne $\ln \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq -0,48$).

   (c) En déduire le signe de $g(x)$.

4. On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = F(u_n)$.

   (a) Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0;1]$.

   (b) Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que (u_n) est décroissante.

   (c) En déduire que la suite (u_n) converge et donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 (EML 2001)

On considère l'application $f \ : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout x de $[0;+\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

(b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, calculer $f'(x)$.

(c) Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.

(d) En déduire que f est C^1 sur $[0;+\infty[$.

(a) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$$

(b) Etudier les variations de la fonction $g \ : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout x de $[0;+\infty[$, par :

$$g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$$

En déduire : $\qquad \forall x \in]0;+\infty[, \quad f''(x) > 0.$

(c) En déduire le sens de variation de f. On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

(d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer :

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq f(x) \leq 1$$

(b) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$.

(c) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$$

(d) Etablir que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 (ESC 1999)

Partie A : analyse

On considère deux suites a et b telles que $a_0 = 1, b_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 0$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{5}{6}a_n + \dfrac{1}{6}b_n \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{5}{6}b_n \end{cases}$$

1. Calculer a_1 et b_1.
2. Montrer que la suite a satisfait à la relation de récurrence

$$(E) : u_{n+2} - \frac{5}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = 0, \quad \forall n \geqslant 0.$$

   On admet que b satisfait à la même relation de récurrence.
3. Déterminer la forme des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ solutions de l'équation (E).
4. En déduire l'expression de a_n.(resp. b_n) en fonction de n.

Partie B : probabilités

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 ainsi que d'une pièce de monnaie non truquée.
Initialement, l'urne U_1 contient une boule blanche et deux boules noires et l'urne U_2 contient deux boules noires.
On considère l'épreuve $\mathcal{E}$ suivante :
- on lance la pièce
- si l'on obtient pile, on tire une boule de U_1, sinon on tire une boule de U_2
- si la boule tirée est noire, elle est remise dans la même urne, sinon elle est remise dans l'autre urne.

Pour n entier naturel non nul, on désigne par X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve la boule blanche à l'issue de n répétitions de $\mathcal{E}$.

I) Dans cette question, on effectue une seule fois E.

1. La notation PB_1 signifiant : "la pièce a donné pile et on a tiré la boule blanche de U_1" (on l'a donc remise dans U_2), calculer la probabilité de l'événement $\{PB_1\}$.

2. En utilisant la même notation, décrire les résultats possibles de $\mathcal{E}$.

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_1.

4. Calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

II) On répète maintenant l'épreuve E.

1. (a) Vérifier que : $P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = \dfrac{5}{6}$ et $P(X_{n+1} = 1|X_n = 2) = \dfrac{1}{6}$
(On n'hésitera pas à faire un schéma)

(b) Calculer également $P(X_{n+1} = 2|X_n = i)$ pour $i = 1$ et pour $i = 2$.

(c) En déduire $P(X_{n+1} = 1)$ puis $P(X_{n+1} = 2)$ en fonction de $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

2. On pose $p_n = P(X_n = 1)$ et $q_n = P(X_n = 2)$.
A l'aide de la **Partie A**, en déduire la loi de X_n.

3. Calculer $E(X_n)$ ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (ESC 1999)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\, dx$.

1. Calculer I_0.
2. Calculer $I_0 + I_1$. En déduire I_1.
3. (a) Quel est le signe de I_n ?

   (b) Montrer que : $\quad I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+2}$

   (c) En déduire que : $\quad I_n \leq \dfrac{1}{2n+2}$.

   (d) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
4. (a) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times} \qquad 2(-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$$

   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$

2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\, dx$$

   (b) Etablir les inégalités : $\quad 0 \leq \int\limits_0^1 \dfrac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\, dx \leq \dfrac{1}{2n+4}$

   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

3. A l'aide des questions précédentes, donner un équivalent de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$$

quand n tend vers $+\infty$.