La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 2 pages et de cinq exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1
Pour tout couple de nombres réels (p,q), on pose $B(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1. Parmi les intégrales $B(-3,1)$,$B(2,-1)$ et $B(3,5)$, déterminer celles qui existent.
2. Pour quelles valeurs de p et q, l'intégrale $B(p,q)$ existe?
   Nous supposons désormais $p \geqslant 0$ et $q \geqslant 0$.
3. Calculer $B(p,0)$.
4. A l'aide du changement de variable $t = 1-x$, exprimer $B(q,p)$ en fonction de $B(p,q)$.
5. A l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $B(p,q) = \dfrac{q}{p+1}B(p+1,q-1)$.
6. Exprimer $B(p,q)$ en fonction de $B(p+2,q-2)$, puis de $B(p+3,q-3)$, etc.
   En déduire que l'expression de $B(p,q)$ en fonction de $B(p+q,0)$
7. Des questions précédentes, en déduire $B(p,q)$ en fonction de p et q

Exercice 2
On pose $f(x) = \int_4^x \dfrac{t}{\ln t}dt$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue et dérivable sur son domaine de définition. Expliciter sa dérivée.
3. Montrer que $\forall t \geqslant 4, \quad \ln t \leqslant \sqrt{t}$.
4. Montrer que $\forall x \geqslant 4, \quad f(x) \geqslant \dfrac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} - 8)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f$.
5. Montrer que f réalise une bijection de $[4,+\infty[$ sur un intervalle à déterminer.
6. Pour quelles valeurs la fonction f' s'annule-t-elle? La fonction f^{-1} est-elle continue? dérivable?

Exercice 3
Une urne contient n boules vertes et n boules rouges. On pioche p boules simultanément $(1 \leqslant p \leqslant 2n)$
On désigne par $V_{n,p}$ le nombre de boules rouges obtenues

1. Déterminer la loi et l'espérance de $V_{4,2}$.

2. Déterminer la loi de $V_{n,p}$ lorsque $p \leqslant n$. Expliciter la loi de $V_{n,n}$. En déduire que $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.
3. Déterminer la loi $V_{4,5}$.
4. Déterminer la loi de $V_{n,p}$ lorsque $p > n$.

Exercice 4
On considère une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u).
On suppose que $\quad p \geqslant \dfrac{1}{4} \quad r \geqslant \dfrac{1}{4} \quad u \geqslant \dfrac{1}{4} \quad$ et que $\quad p + r + u = 1$.
On effectue n tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages.
On appelle X_n (resp Y_n) le rang d'apparition de la première boule blanche (resp. rouge).
On convient que $X_n = 0$ (resp. $Y_n = 0$) si et seulement la boule blanche (resp. rouge) n'est pas obtenue au cours des n tirages
Par exemple, si la boule blanche apparait pour la première fois au $2^{ème}$ tirage, $X_n = 2$ et si la boule blanche n'apparait au cours de n tirages, $X_n = 0$.
Pour tout entier naturel $1 \leqslant k \leqslant n$, on note B_k (respectivement R_k, V_k) l'événement :
"Tirer une boule blanche (respectivement rouge, verte) au $k^{ième}$ tirage".

1. Déterminer la loi de X_3 et vérifier que $\sum\limits_{i \in X_3(\Omega)} P(X_3 = i) = 1$.
2. Déterminer la loi de X_n et de Y_n
3. Soient i et j deux entiers appartenant à $\{1,..,n\}$.
   En distinguant les cas $i = j$, $i < j$ et $i > j$, exprimer l'événement $(X = i \cap Y = j)$ à l'aide des événements décrits dans l'énoncé. En déduire $P(X = i \cap Y = j)$
4. Calculer $P(X = 0 \cap Y = j)$ avec $j \geqslant 1$, $P(X = i \cap Y = 0)$ avec $i \geqslant 1$ et $P(X = 0 \cap Y = 0)$.
5. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 5
Un restaurant propose 3 menus différents X, Y, Z et on suppose que chaque client choisit *au hasard* l'un quelconque des trois menus, les choix des différents clients étant indépendants les uns des autres. Les clients n'étant pas trop gourmands, ils ne choisissent qu'un seul menu (et non les trois comme Obélix, qui heureusement, ne fait pas partie des clients)
Un jour donné, n clients se présentent et on note X_n (respectivement Y_n,Z_n) le nombre aléatoire de clients choisissant le menu X (respectivement Y,Z).

1. Quelle est la loi de X_2 (respectivement Y_2,Z_2)? Déterminer son espérance et sa variance.
2. Justifier que les variables X_n,Y_n et Z_n suivent la même loi. Quelle est la loi de X_n?
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $n - X_n$.
   Exprimer l'espérance (resp. la variance) de $n - X_n$ en fonction de $E(X_n)$ (resp. $V(X_n)$).
4. Que vaut $X_n + Y_n + Z_n$? En déduire la loi de $Y_n + Z_n$.
5. Quelle est la probabilité que tous les clients choisissent le même menu?
6. On supose que $n \geqslant 3$.
   Calculer la probabilité $P([X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0])$.
   En déduire la probabilité que le restaurateur soit obligé de préparer au moins une fois chacun des trois menus.