Correction exercice 1 (EML 2003)

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et l'égalité $A^3 = A^2 + 2A$ en découle
2. $xA + yA^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+3y & x+y & x+y \\ x+y & y & y \\ x+y & y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+3y=0 \\ x+y=0 \\ y=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x=0$ et $y=0)$
3. Posons $(\mathcal{H}_n)$: il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n A^2$
   Initialisation : $(\mathcal{H}_1)$ est vraie car si l'on pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, on a $A^1 = 1 \times A + 0 \times A^2$
   Hérédité : supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie. Il existe a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n A^2$ donc
   $$A^{n+1} = A \times A^n = A(a_n A + b_n A^2) = a_n A^2 + b_n A^3 = a_n A^2 + b_n(A^2 + 2A) = 2b_n A + (a_n + b_n)A^2.$$
   Si l'on pose $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$ on a bien $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}A^2$ ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.
4.
   (a) $a_{n+2} = 2b_{n+1} = 2(a_n + b_n) = 2a_n + 2b_n = 2a_n + a_{n+1}$
   (b) La suite a est récurrente d'ordre 2. Les racines de l'équation caractéristique $x^2 = x + 2$ sont -1 et 2 ce qui implique qu'il existe deux réels α, β tels que $a_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$. On a $a_1 = 1$ et $a_2 = 2b_1 = 0$ donc
   $$\left\{ \begin{array}{l} 1 = 2\alpha - \beta \\ 0 = 4\alpha + \beta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = 2\alpha - \beta \\ 1 = 6\alpha \end{array} \right. \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{6} \\ \beta = -\frac{2}{3} \end{array} \right.$$
   ce qui donne $a_n = \frac{1}{6}2^n - \frac{2}{3}(-1)^n$ et $b_n = \frac{a_{n+1}}{2} = \frac{1}{6}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n$
   (c) $A^n = \left(\frac{1}{6}2^n - \frac{2}{3}(-1)^n\right) A^2 + \left(\frac{1}{6}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n\right) A$

Correction exercice 2 (Ecricome 2002)

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.
On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec $c \geqslant 1$ boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages $(n \geqslant 2)$.
On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{ème} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. C'est le nombre de boules blanches obtenues au cours des p tirages.
2. $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$, $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$; $E(X_1) = \frac{1}{2}$
3.
   – $(X_1, X_2)(\Omega) = \{0, 1\}^2$.
   L'évènement $(X_1 = 0 \cap X_2 = 0)$ signifie que l'on pioche une boule noire au premier tirage, on remet c boules noires supplémentaires dans l'urne qui contient alors $c + 1$ noires et 1 blanche donc
   $$P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0/X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2}$$

Par le même type de raisonnement, on obtient

$$\begin{aligned} P(X_1 &= 0\cap X_2=1)=P(X_1=0)P(X_2=1/X_1=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{c+2} \\ P(X_1 &= 1\cap X_2=0)=P(X_1=1)P(X_2=0/X_1=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{c+2} \\ P(X_1 &= 1\cap X_2=1)=P(X_1=1)P(X_2=1/X_1=1)=\frac{1}{2}\times\frac{c+1}{c+2} \end{aligned}$$

Il est immédiat que $\sum\limits_{i,j} P(X_1=i\cap X_2=j)=1$ ce qui nous assure d'un bon calcul

– $X_2(\Omega)=\{0,1\}$ et

$$P(X_2=0)=P(X_1=0\cap X_2=0)+P(X_1=1\cap X_2=0)=\frac{1}{2}\times\frac{c+1}{c+2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{c+2}=\frac{1}{2}$$

et $P(X_2=1)=1-P(X_2=0)=\frac{1}{2}$. Il est immédiat que $E(X_2)=\frac{1}{2}$

4. Nous commençons par le tableau

Z_2	0	1	X_2
0	0	1	
1	1	2	
X_1			

Ainsi $Z_2(\Omega)=\{0,1,2\}$ et

$$P(Z_2=0)=P(X_1=0\cap X_2=0)=\frac{1}{2}\times\frac{c+1}{c+2}$$

$$\begin{aligned} P\left(Z_2=1\right) &= P((X_1=1\cap X_2=0)\cup(X_1=0\cap X_2=1))=P\left(X_1=1\cap X_2=0\right)+P\left(X_1=0\cap X_2=1\right) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{c+2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{c+2}=\frac{1}{c+2} \end{aligned}$$

$$P(Z_2=2)=P(X_1=1\cap X_2=1)=\frac{1}{2}\times\frac{c+1}{c+2}$$

5. D'après la question 1, on a $Z_p\left(\Omega\right)=[\![0,p]\!]$ de Z_p.
6. Soit $p\leqslant n-1$.
   (a) "L'évènement" $(X_{p+1}=1\,/Z_p=k)$ signifie que l'on déjà obtenu k boules blanches en p tirages : on a donc ajouté $k\times c$ boules blanches et $(p-k)\times c$ boules noires. Après le $p^{i\grave{e}me}$ tirage, l'urne contient $p\times c+2$ boules dont $kc+1$ boules blanches et $(p-k)\times c+1$ boules noires. On pioche une boule dans cette urne et on obtient une blanche. La probabilité d'obtenir une blanche est $\frac{kc+1}{pc+2}$. On a alors

$$\forall k\in Z_p(\Omega),\qquad P(X_{p+1}=1\,/Z_p=k)=\frac{kc+1}{pc+2}$$

   (b) On considère le système complet d'évènements $(Z_p=k)_{0\leqslant k\leqslant p}$

$$\begin{aligned} P(X_{p+1} &= 1)=\sum_{k=0}^{p}P(X_{p+1}=1\,/Z_p=k)P(Z_p=k)=\sum_{k=0}^{p}\frac{kc+1}{pc+2}P(Z_p=k) \\ &= \frac{1}{2+pc}\sum_{k=0}^{p}(kc+1)P(Z_p=k)=\frac{c}{2+pc}\sum_{k=0}^{p}kP(Z_p=k)+\frac{1}{2+pc}\sum_{k=0}^{p}P(Z_p=k) \\ &= \frac{c}{2+pc}E(Z_p)+\frac{1}{2+pc}=\frac{1+cE(Z_p)}{2+pc} \end{aligned}$$

   (c) Posons $(\mathcal{H}_p)$: les variables $X_1,..,X_p$ suivent une loi de de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$
   Initialisation : $(\mathcal{H}_1)$ est vraie d'après la question 2
   Hérédité : supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie. La question 6b montre que

$$P(X_{p+1}=1)=\frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}. \tag{1}$$

On a $Z_p = \sum_{k=1}^{p} X_k$ où les variables $X_1, .., X_p$ suivent une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$donc

$$E(Z_p) = \sum_{k=1}^{p} E(X_k) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2} = \frac{p}{2} \tag{2}$$

Les égalités (1) et (2) nous montre que

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + c\frac{p}{2}}{2 + pc} = \frac{\frac{2 + pc}{2}}{2 + pc} = \frac{1}{2}$$

donc

$$P(X_{p+1} = 0) = 1 - P(X_{p+1}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ce qui démontre que la variable X_{p+1} suit une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Correction exercice 3 (EML 2002)

1. Etude préliminaire

(a) $s_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n^0 x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ et $s_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n^1 x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

(b)

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1))!} = \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k))!} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}[(k+1)+(n-k)] = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}(n+1) = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} xs_k(x) + xs_{k+1}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^{n+1} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} C_n^{k+1} x^{n+1} = C_k^k x^{k+1} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} C_n^k x^{n+1} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} C_n^{k+1} x^{n+1} \\ &= x^{k+1} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} (C_n^k + C_n^{k+1}) x^{n+1} = x^{k+1} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} C_{n+1}^{k+1} x^{n+1} = x^{k+1} + \sum_{n=k+2}^{+\infty} C_n^{k+1} x^n \\ &= x^{k+1} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} C_n^{k+1} x^n - C_{k+1}^{k+1} x^{k+1} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} C_n^{k+1} x^n = s_{k+1}(x) \end{aligned}$$

(d) Posons $(\mathcal{H}_n) : \forall x \in [0, 1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$

Initialisation : $(\mathcal{H}_0)$ est vraie (cela a été vérifié à la question a)

Hérédité : supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie i.e. $\forall x \in [0, 1[, \quad s_n(x) = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$. On a

$$xs_n(x) + xs_{n+1}(x) = s_{n+1}(x) \Leftrightarrow (1-x)s_{n+1}(x) = xs_n(x)$$

$$\Leftrightarrow s_{n+1}(x) = \frac{x}{1-x} s_n(x) = \frac{x}{1-x} \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}} = \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{n+2}}$$

donc $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie et ceci achève la récurrence

2. Etude d'une expérience aléatoire.

(a) La probabilité de picher une boule noire est $\frac{1}{5}$ et N est le rang d'apparition de la première boule noire donc la variable N suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{5}$ i.e.

$$N(\Omega) = \mathbb{N}^{\times}, \qquad P(N = k) = \frac{1}{5}(1 - \frac{1}{5})^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}^{\times}$$

et son espérance est $\frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$

(b) "L'évènement" $(X = k/N = n)$ correspond au fait de vouloir obtenir k boules noires en n tirages (car la première boule noire est apparu au $n^{ième}$ tirage donc on effectue n pioches successives avec remise). Si $k > n$, cet évènement est vide et si $k \leqslant n$ nous pouvons utiliser la loi binômiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{5})$

$$P(X = k/N = n) = \begin{cases} C_n^k(\frac{1}{5})^k(1-\frac{1}{5})^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

(c) On applique la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $(N = n)_{n\geqslant 1}$

$$P(X = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 0/N = n)P(N = n)$$

Dans cette somme, il est immédiat que $0 \leqslant n$ donc nous avons

$$\begin{aligned} P\left(X=0\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} C_n^0(\frac{1}{5})^0(1-\frac{1}{5})^{n-0}\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5})^{n-1} = \frac{1}{5}(1-\frac{1}{5})^{-1}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{1}{5})^n(1-\frac{1}{5})^n \\ &= \frac{1}{5}\frac{5}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{1}{5})^{2n} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\left((1-\frac{1}{5})^2\right)^n = \frac{1}{4}\left[(1-\frac{1}{5})^2 + \left((1-\frac{1}{5})^2\right)^2 + ...\right] \\ &= \frac{1}{4}(1-\frac{1}{5})^2\left[1 + \left((1-\frac{1}{5})^2\right) + \left((1-\frac{1}{5})^2\right)^2 + ...\right] = \frac{1}{4}\times\frac{16}{25}\times\frac{1}{1-(1-\frac{1}{5})^2} \\ &= \frac{1}{4}\times\frac{16}{25}\times\frac{25}{9} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

(d) On applique la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $(N = n)_{n\geqslant 1}$

$$P(X = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = k/N = n)P(N = n)$$

Dans cette somme, il est immédiat que les termes $k > n$ sont nuls donc nous avons

$$\begin{aligned} P\left(X=k\right) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X=k/N=n)P(N=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k(\frac{1}{5})^k(1-\frac{1}{5})^{n-k}\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5})^{n-1} \\ &= \frac{1}{5}(1-\frac{1}{5})^{-k-1}(\frac{1}{5})^k\sum_{n=k}^{+\infty}C_n^k(1-\frac{1}{5})^n(1-\frac{1}{5})^n = \frac{1}{5}(\frac{4}{5})^{-k-1}(\frac{1}{5})^k\sum_{n=k}^{+\infty}C_n^k\left((1-\frac{1}{5})^2\right)^n \\ &= \frac{1}{5}(\frac{5}{4})^{k+1}(\frac{1}{5})^k\frac{\left((1-\frac{1}{5})^2\right)^k}{(1-(1-\frac{1}{5})^2)^{k+1}} = \frac{\frac{1}{5}\times\frac{5}{4}}{1-(1-\frac{1}{5})^2}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{(1-\frac{1}{5})^2}{1-(1-\frac{1}{5})^2}\right)^k \\ &= \frac{25}{36}(\frac{4}{9})^k \end{aligned}$$

(e) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} nP(X = n) = \sum\limits_{n\geqslant 1} n\frac{25}{36}(\frac{4}{9})^n = \frac{25}{36}\sum\limits_{n\geqslant 1} n(\frac{4}{9})^n$ est convergente car $\frac{4}{9} \in]-1, 1[$ donc X possède une espérance et

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{25}{36}(\frac{4}{9})^n = \frac{25}{36}\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{4}{9})^n = \frac{25}{36}\frac{\frac{4}{9}}{(1-\frac{4}{9})^2} = 1$$

(f) On commence par remarquer que

$$P\left(X \leqslant k\right) = 1 - P(X > k) = 1 - P(X \geqslant k+1) = 1 - \sum_{n=k+}^{+\infty} P(X = n)$$

puis

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k+}^{+\infty} P(X=n) &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{25}{36}(\frac{4}{9})^n = \frac{25}{36}\sum_{n=k+1}^{+\infty}(\frac{4}{9})^n = \frac{25}{36}\left((\frac{4}{9})^{k+1}+(\frac{4}{9})^{k+2}+...\right) \\
&= \frac{25}{36}(\frac{4}{9})^{k+1}\left(1+(\frac{4}{9})^1+(\frac{4}{9})^2+...\right) = \frac{25}{36}(\frac{4}{9})^{k+1}\frac{1}{1-\frac{4}{9}} \\
&= \frac{25}{36}(\frac{4}{9})^{k+1}\frac{9}{5} = \frac{5}{4}(\frac{4}{9})^{k+1} = \frac{5}{4}\frac{4}{9}(\frac{4}{9})^k = \frac{5}{9}(\frac{4}{9})^k
\end{aligned}$$

d'où

$$P(X \leqslant k) = 1 - \frac{5}{9}(\frac{4}{9})^k$$

Correction exercice 4 (EDHEC 2003)

1.

(a) On applique comme l'on nous propose la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
P(E_{n+1}) &= P(E_{n+1}/E_n)P(E_n) + P(E_{n+1})P(F_n) \\
&\quad + P(E_{n+1}/G_n)P(G_n) + P(E_{n+1}/H_n)P(H_n)
\end{aligned}$$

- (E_{n+1}/E_n) : les parties A_n et A_{n-1} sont gagnées. Gagner les parties A_{n+1} et A_n signifie gagner une partie quand les deux précédentes sont gagnées donc $P(E_{n+1}/E_n) = \frac{2}{3}$.
- (E_{n+1}/F_n) : la partie A_n est gagnée et la partie A_{n-1} est perdue. Gagner les parties A_{n+1} et A_n signifie gagner une partie quand une partie est perdue et la suivante est gagnée donc $P(E_{n+1}/E_n) = \frac{1}{2}$.
- (E_{n+1}/G_n) : la partie A_n est perdue et la partie A_{n-1} est gagnée. Gagner les parties A_{n+1} et A_n est donc impossible ce qui implique $P(E_{n+1}/G_n) = 0$.
- (E_{n+1}/H_n) : les parties A_n et A_{n-1} sont perdues. Gagner les parties A_{n+1} et A_n est donc impossible ce qui implique $P(E_{n+1}/H_n) = 0$.

Nous avons donc $P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$.

(b) Par les raisonnements similaires au cas précédent, on a
- $P(F_{n+1}) = \frac{1}{2}P(G_n) + \frac{1}{3}P(H_n)$
- $P(G_{n+1}) = \frac{1}{3}P(F_n) + \frac{1}{2}P(G_n)$
- $P(H_{n+1}) = \frac{1}{2}P(G_n) + \frac{1}{3}P(H_n)$

(c) Cela résulte immédiatement du lien système-matrice

2.

(a) $PQ = 10I_4 \Leftrightarrow P(\frac{1}{10}Q) = I_4$ donc la matrice P est inversible et son inverse est $\frac{1}{10}Q$ i.e.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

(b) $M = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}M = DP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}MP = D$ et un calcul directe montre que

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonale}$$

3.

(a) $(\mathcal{P}_n) : M^n = PD^nP^{-1}$.
Intialisation : $n = 1$. cela découle de la question 2)b)
Hérédité : supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.$M^{n+1} = M^nM = PD^n\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}DP = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ ce qui démondre $(\mathcal{P}_{n+1})$.

(b) $(\mathcal{P}_n) : U_n = M^{n-2}U_2$.
Intialisation : $n = 2$. $M^{n-2}U_2 = M^0U_2 = I_4U_2 = U_2$ donc $(\mathcal{P}_2)$ est vérifiée
Hérédité : supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.$U_{n+1} = MU_n = MM^{n-2}U_2 = M^{n-1}U_2$ ce qui démondre $(\mathcal{P}_{n+1})$.

(c) On a $U_n = M^{n-2}U_2$ avec $M^{n-2} = PD^{n-2}P^{-1}$ ce qui nous donne

$$P(E_n) = (\frac{3}{5}(\frac{1}{2})^{n-2} - \frac{1}{10}((-\frac{1}{3}))^{n-2} + \frac{1}{5}(\frac{1}{6})^{n-2} + \frac{3}{10})P(E_2) + (\frac{3}{10}(\frac{1}{2})^{n-2} - \frac{3}{10}((-\frac{1}{3}))^{n-2} - \frac{3}{10}(\frac{1}{6})^{n-2} + \frac{3}{10})P(F$$
$$+(-\frac{3}{10}(\frac{1}{2})^{n-2} + \frac{3}{10}((-\frac{1}{3}))^{n-2} - \frac{3}{10}(\frac{1}{6})^{n-2} + \frac{3}{10})P(G_2) + (-\frac{3}{5}(\frac{1}{2})^{n-2} + \frac{1}{10}((-\frac{1}{3}))^{n-2} + \frac{1}{5}(\frac{1}{6})^{n-2} + \frac{3}{10})P(H_2)$$
$$P(F_n) = (-\frac{1}{5}(\frac{1}{2})^{n-2} + \frac{1}{5}((-\frac{1}{3}))^{n-2} - \frac{1}{5}(\frac{1}{6})^{n-2} + \frac{1}{5})P(E_2) + (-\frac{1}{10}(\frac{1}{2})^{n-2} + \frac{3}{5}((-\frac{1}{3}))^{n-2} + \frac{3}{10}(\frac{1}{6})^{n-2} + \frac{1}{5})P(F_2$$
$$+(\frac{1}{10}(\frac{1}{2})^{n-2} - \frac{3}{5}((-\frac{1}{3}))^{n-2} + \frac{3}{10}(\frac{1}{6})^{n-2} + \frac{1}{5})P(G_2) + (\frac{1}{5}(\frac{1}{2})^{n-2} - \frac{1}{5}((-\frac{1}{3}))^{n-2} - \frac{1}{5}(\frac{1}{6})^{n-2} + \frac{1}{5})P(H_2)$$
$$P(G_n) = (\frac{1}{5}(\frac{1}{2})^{n-2} - \frac{1}{5}((-\frac{1}{3}))^{n-2} - \frac{1}{5}(\frac{1}{6})^{n-2} + \frac{1}{5})P(E_2) + (\frac{1}{10}(\frac{1}{2})^{n-2} - \frac{3}{5}((-\frac{1}{3}))^{n-2} + \frac{3}{10}(\frac{1}{6})^{n-2} + \frac{1}{5})P(F_2)$$
$$+(-\frac{1}{10}(\frac{1}{2})^{n-2} + \frac{3}{5}((-\frac{1}{3}))^{n-2} + \frac{3}{10}(\frac{1}{6})^{n-2} + \frac{1}{5})P(G_2) + (-\frac{1}{5}(\frac{1}{2})^{n-2} + \frac{1}{5}((-\frac{1}{3}))^{n-2} - \frac{1}{5}(\frac{1}{6})^{n-2} + \frac{1}{5})P(H_2)$$
$$P(H_n) = (-\frac{3}{5}(\frac{1}{2})^{n-2} + \frac{1}{10}((-\frac{1}{3}))^{n-2} + \frac{1}{5}(\frac{1}{6})^{n-2} + \frac{3}{10})P(E_2) + (-\frac{3}{10}(\frac{1}{2})^{n-2} + \frac{3}{10}((-\frac{1}{3}))^{n-2} - \frac{3}{10}(\frac{1}{6})^{n-2} + \frac{3}{10})$$
$$+(\frac{3}{10}(\frac{1}{2})^{n-2} - \frac{3}{10}((-\frac{1}{3}))^{n-2} - \frac{3}{10}(\frac{1}{6})^{n-2} + \frac{3}{10})P(G_2) + (\frac{3}{5}(\frac{1}{2})^{n-2} - \frac{1}{10}((-\frac{1}{3}))^{n-2} + \frac{1}{5}(\frac{1}{6})^{n-2} + \frac{3}{10})P(H_2)$$

(d) On se rappelle que la famille (E_2, F_2, G_2, H_2) est un système complet d'évènements

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{3}{10}(P(E_2) + P(F_2) + P(G_2) + P(H_2)) = \frac{3}{10}.$$

De même, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(F_n\right) = \frac{2}{10}, \quad \lim_{n\to+\infty} P\left(G_n\right) = \frac{2}{10}, \quad \lim_{n\to+\infty} P\left(H_n\right) = \frac{3}{10}$$