

Exercice 1 (Edhec 2002)

1. Le numérateur et le dénominateur sont continus sur $\mathbb{R}_+^\times$ et le quotient ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$. En 0, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2) = 1$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 = f(0)$ donc f est continue en 0. Par suite, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Nous effectuons l'étude du signe sur $\mathbb{R}_+$ donc le signe de f est l'opposé celui de $\ln$, ce qui nous donne $f \leq 0$ sur $[1, +\infty[$ et $f \geq 0$ sur $]0, 1]$

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est définie, continue et C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

- (a) La fonction g est dérivable puisqu'il s'agit de la différence de deux fonctions dérivables (cf. 2). $g'(x) =$

$$f(x) - 1 \text{ donc si } x > 0, \text{ on a : } g'(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2} - 1 = -\frac{x \ln x + 1 + x^2}{1+x^2} = -x \frac{\ln x + \frac{1}{x} + x}{1+x^2} = \frac{-xh(x)}{1+x^2}$$

- (b) $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{x^2 + x - 1}{x^2}$. Les racines du trinôme $x^2 + x - 1$ sont $x_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La seule qui est utile pour notre fonction h est x_+ . Il est immédiat que $h' \geq 0$ sur $[x_+, +\infty[$ et $h' \leq 0$ sur $]0, x_+]$ (la fonction h est définie sur $\mathbb{R}_+^\times$) d'où le

tableau de variation

x	0		$x_+ > 1$		$+\infty$
$x^2 + x - 1$		-	0	+	
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\underbrace{> 0}_{h(x_+)}$	$\nearrow$	$+\infty$

- (c) Le tableau de variation précédent montre que h est positive sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc $g'(x) = \frac{-xh(x)}{1+x^2}$ est négative sur $\mathbb{R}_+^\times$. La fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $g(0) = 0$ donc g est négative sur $\mathbb{R}_+$.

- (a) La dérivée de F est f qui est positive sur $[0, 1]$ donc F est croissante sur $[0, 1]$. ainsi $F([0, 1]) = [F(0), F(1)]$ avec $F(0) = 0$ et $F(1) \leq 1$ (car $g(1) = F(1) - 1 \leq 0$ cf. 3.c) donc l'intervalle $[0, 1]$ est stable par F .

On introduit l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{H}_n) : u_n$ existe et appartient à $[0; 1]$.

Initialisation : $(\mathcal{H}_0)$ est vraie car $u_0 = 1 \in [0, 1]$.

Hérédité : supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie. $u_n \in [0, 1]$ donc $F(u_n)$ existe ($\mathcal{D}_F = \mathbb{R}_+$) et appartient à $[0, 1]$ (stabilité de $[0, 1]$ par F) donc u_{n+1} existe et appartient à $[0, 1]$, ce qui implique que $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$

- (b) La question 3.c montre que $\forall x \geq 0, F(x) \leq x$. Pour tout entier $n \geq 0, u_n \geq 0$ donc $F(u_n) = u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite u est décroissante.
- (c) La suite u est décroissante minorée par 0 donc elle converge vers une limite L telle que $L \in [0, 1]$ et $F(L) = L \Leftrightarrow g(L) = 0$. Nous avons vu dans la question 3.c que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $g(0) = 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet que 0 comme solution; ce qui implique que $L = 0$

Exercice 2 (EML 2001)

1. (a) Comme dans l'exercice 1, on montre que f est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$. En 0, on a $\frac{x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ donc

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 = f(0) \text{ ce qui montre que } f \text{ est continue en 0 et, par conséquent, sur } \mathbb{R}_+.$$

- (b) $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x - 1$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \neq 0, e^x - 1 \neq 0$ donc f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\forall x > 0, f'(x) = -\frac{xe^x - e^x + 1}{(e^x - 1)^2}$.

- (c) On commence par remarquer que $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$ puis on effectue un $DL_2(0)$ du numérateur ce qui nous donne

$$xe^x - e^x + 1 = x(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) - (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) + x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

$$\text{Ainsi, nous obtenons } -\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = -\frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \text{ donc } f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

- (d) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$ donc le théorème de prolongement continu de la dérivée montre que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{xe^x - e^x + 1}{(e^x - 1)^2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (a) $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x - 1$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \neq 0, e^x - 1 \neq 0$ donc f est C^2 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f')'(x) = \left(-\frac{xe^x - e^x + 1}{(e^x - 1)^2}\right)' = -\frac{(xe^x - e^x + 1)'(e^x - 1)^2 - (xe^x - e^x + 1)[(e^x - 1)^2]'}{(e^x - 1)^4} \\ &= -\frac{xe^x(e^x - 1)^2 - (xe^x - e^x + 1)2e^x(e^x - 1)}{(e^x - 1)^4} = e^x(e^x - 1) \frac{(x - 2e^x + xe^x + 2)}{(e^x - 1)^4} \\ &= \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (xe^x - 2e^x + x + 2) \end{aligned}$$

- (b) $g'(x) = -e^x + xe^x + 1$, $g''(x) = xe^x$ d'où le tableau de variation ci-contre qui montre que g est positive sur $\mathbb{R}_+$. Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^x - 1$ sont positives sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction f'' est positive sur $\mathbb{R}_+$,

x	0		$+\infty$
$g''(x)$		+	
$g'(x)$	0	$\nearrow$	
$g(x)$	0	+	

- (c) La fonction f'' est positive donc f' est croissante. $f'(0) = -\frac{1}{2}$ et $f'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{xe^x}{(e^x)^2} = -xe^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Limite de f en $+\infty$: $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x}{e^x} = -xe^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit le tableau de variation et le graphique de f

x	0		$+\infty$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	0

- (d) Le tableau de variation de f montre que $\forall x \in \mathbb{R}_+, -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$ (donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$) et $0 \leq f(x) \leq 1$.
- (e) Il faut distinguer les cas $x = 0$ et $x \neq 0$ (car f possède deux expressions). Si $x = 0$, $f(0) = 1 \neq 0$.
Si $x \neq 0$, $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} = x \Leftrightarrow 1 = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$
donc $x = \ln 2$ est l'unique solution de $f(x) = x$
- (f) On constate que $\mathbb{R}_+$ est un intervalle stable par f (cf. tableau de variation) et $u_0 \in \mathbb{R}_+$ donc une récurrence montre immédiatement que $\forall n \geq 0, u_n \in \mathbb{R}_+$. On sait que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que
 $\forall x \in [0; +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. Nous pouvons appliquer l'inégalité des accroissements finis avec $x = u_n$ et $y = \ln 2$ ce qui nous donne

$$|f(u_n) - f(\ln 2)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$$

- (g) On introduit l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{H}_n) : |u_n - \ln 2| \leq (\frac{1}{2})^n |1 - \ln 2|$

Initialisation : $(\mathcal{H}_0)$ est vraie car $|u_0 - \ln 2| = 1 - \ln 2 = (\frac{1}{2})^0 |1 - \ln 2|$.

Hérédité : supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie. On a $|u_n - \ln 2| \leq (\frac{1}{2})^n |1 - \ln 2|$ et $|u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$
donc $|u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} (\frac{1}{2})^n |1 - \ln 2| = (\frac{1}{2})^{n+1} |1 - \ln 2|$, ce qui implique que $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie et termine la récurrence.

La suite $(\frac{1}{2})^n |1 - \ln 2|$ est géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ donc elle tend vers 0.

L'inégalité $\forall n \geq 0, \quad 0 \leq |u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \ln 2|$ combinée au théorème d'encadrement montre que la suite $|u_n - \ln 2|$ tend vers 0 donc la suite u tend vers $\ln 2$.

Exercice 3 (ESC 1999)

Partie A : analyse

- $$u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \left(\frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n\right) + \left(\frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}b_n\right) = a_n + b_n = u_n$$

$$v_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \left(\frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n\right) - \left(\frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}b_n\right) = \frac{2}{3}(a_n - b_n) = \frac{2}{3}u_n$$
- $$u_n = u_1 \text{ et } v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}v_1.$$
- $$\begin{cases} a_n + b_n = u_n \\ a_n - b_n = v_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n + b_n = u_1 \\ a_n - b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{2}\left[u_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}v_1\right] & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ b_n = \frac{1}{2}\left[u_1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}v_1\right] & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{2}\left[a_1 + b_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(a_1 - b_1)\right] & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ b_n = \frac{1}{2}\left[u_1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}v_1\right] & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

Partie B : probabilités

I) Dans cette question, on effectue une seule fois E .

- $$P(\{PB_1\}) = P(\{P\})P(\{B_1\}/\{P\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ (on pioche dans l'urne } U_1)$$
- $\mathcal{E} = \{\{PB_1\}, \{PN_1\}, \{FN_2\}\}$ où P désigne pile, F face, B_1 boule blanche de l'urne k , N_k boule noire de l'urne k
- $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$. L'évènement $(X_1 = 1)$ signifie que la boule blanche est dans l'urne U_1 après l'expérience $\mathcal{E}$ c'est-à-dire que l'on obtenu pile et pioché une boule noire dans U_1 ou l'on a obtenu face et on a pioché une boule noire. L'évènement $(X_1 = 2)$ signifie que la boule blanche est dans l'urne U_2 à l'issue de l'expérience $\mathcal{E}$ donc on a nécessairement pioché la boule blanche dans l'urne U_1 ce qui implique que l'on a obtenu pile.

On en déduit les calculs suivants :

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1) &= P(\{PN_1\} \cup \{FN_2\}) = P(\{PN_1\}) + P(\{FN_2\}) \text{ (les évènements sont incompatibles)} \\ &= P(\{P\})P(\{N_1\}/\{P\}) + P(\{F\})P(\{N_2\}/\{F\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$P(X_1 = 2) = P(\{PB_1\}) = \frac{1}{6}.$$

$$4. E(X_1) = 1P(X_1 = 1) + 2P(X_1 = 2) = \frac{5}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{6}.$$

$$V(X_1) = E(X_1^2) - [E(X_1)]^2 = 1^2P(X_1 = 1) + 2^2P(X_1 = 2) - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{9}{6} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{5}{36}$$

II) On répète maintenant l'épreuve E .

- (a) On remarque pour commencer que il y a toujours deux boules noires dans chaque urne et que seule la boule blanche peut changer d'urne.

L'évènement $(X_{n+1} = 1 | X_n = 1)$ signifie que la boule blanche est dans l'urne U_1 au rang n puis à l'issue de l'expérience $\mathcal{E}$, la boule blanche est encore dans l'urne U_1 . Si l'on a obtenu pile, on doit choisir une boule noire dans U_1 et si l'on a obtenu face, on choisit une boule noire dans U_2 . Autrement dit, $(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = \{PN_1\} \cup \{FN_2\}$ donc $P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = \frac{5}{6}$

L'évènement $(X_{n+1} = 1 | X_n = 2)$ signifie que la boule blanche est dans l'urne U_2 au rang n puis à l'issue de l'expérience $\mathcal{E}$ la boule blanche se trouve dans l'urne U_1 donc on a nécessairement pioché la boule blanche dans l'urne U_2 ce qui implique que l'on a obtenu face. Autrement dit, $(X_{n+1} = 1 | X_n = 2) = \{PB_2\}$ donc

$$P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = P(\{PB_2\}) = P(\{P\})P(\{B_2\}/\{P\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ (on pioche dans l'urne } U_2 \text{ qui contient la blanche et deux noires).}$$

- (b) L'évènement $(X_{n+1} = 2 | X_n = 1)$ signifie que la boule blanche est dans l'urne U_1 au rang n puis à l'issue de l'expérience $\mathcal{E}$, la boule blanche est dans l'urne U_2 donc on a nécessairement pioché la boule blanche

dans l'urne U_1 ce qui implique que l'on a obtenu face. Autrement dit, $(X_{n+1} = 1 | X_n = 2) = \{FB_1\}$ donc

$P(X_{n+1} = 2 | X_n = 1) = P(\{FB_1\}) = P(\{F\})P(\{B_1\}/\{F\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ (on pioche dans l'urne U_1 qui contient la blanche et deux noires).

L'évènement $(X_{n+1} = 2 | X_n = 2)$ signifie que la boule blanche est dans l'urne U_2 au rang n puis à l'issue de l'expérience $\mathcal{E}$ a boule blanche est encore dans l'urne U_2 . Si l'on a obtenu pile, on doit choisir une boule noire dans U_1 et si l'on a obtenu face, on choisit une boule noire dans U_2 . Autrement dit,

$(X_{n+1} = 2 | X_n = 2) = \{PN_1\} \cup \{FN_2\}$ donc $P(X_{n+1} = 2 | X_n = 2) = \frac{5}{6}$

Nous pouvons résumer tous ces calculs dans le tableau :

$P(X_{n+1} = i X_n = j)$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	5/6	1/6
$i = 2$	1/6	5/6

2. On applique la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $(X_n = 1), (X_n = 2)$, ce

qui nous donne $P(X_{n+1} = i) = \sum_{j=1}^2 P(X_{n+1} = i | X_n = j)P(X_n = j)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(X_{n+1} = 1) &= \frac{5}{6}P(X_n = 1) + \frac{1}{6}P(X_n = 2) \\ P(X_{n+1} = 2) &= \frac{1}{6}P(X_n = 1) + \frac{5}{6}P(X_n = 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{n+1} &= \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{6}q_n \\ q_{n+1} &= \frac{1}{6}p_n + \frac{5}{6}q_n \end{cases}$$

Les suites p et q vérifient les conditions de la **Partie A**, si l'on considère $a = p$ et $b = q$. En remarquant que $p_1 = P(X_1 = 1) = \frac{5}{6}$ et $q_1 = P(X_1 = 2) = \frac{1}{6}$ (cf. la **Partie A, I**), on a

$$\begin{cases} p_n &= \frac{1}{2}[p_1 + q_1 + (\frac{2}{3})^{n-1}(p_1 - q_1)] = \frac{1}{2}[1 + (\frac{2}{3})^n] \\ q_n &= \frac{1}{2}[p_1 + q_1 - (\frac{2}{3})^{n-1}(p_1 - q_1)] = \frac{1}{2}[1 - (\frac{2}{3})^n] \end{cases}$$

La loi de X_n est $X_n(\Omega) = \{1, 2\}$ avec $\begin{cases} p(X_n = 1) &= \frac{1}{2}[1 + (\frac{2}{3})^{n-1}] \\ p(X_n = 2) &= \frac{1}{2}[1 - (\frac{2}{3})^n] \end{cases}$

3. $E(X_n) = 1P(X_n = 1) + 2P(X_n = 2) = \frac{1}{2}[1 + (\frac{2}{3})^{n-1}] + [1 - (\frac{2}{3})^n] = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}$.

Exercice 4 (EML 1999)

1. Notons B_k l'évènement obtenir une boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage.

(a) $P(B_1) = \frac{b}{b+r}$.

- (b) Pour calculer cette probabilité, il est indispensable de connaître la couleur qui a été rajoutée dans l'urne, c'est-à-dire de savoir si l'on a eu une blanche au premier tour ou au second. Cela nous incite à introduire le système complet d'évènements $(B_1, \overline{B_1})$. Si l'on a obtenu une boule blanche (resp. rouge), on dispose de $b+r+c$ boules et il y a $b+c$ (resp. $r+c$) boules blanches (resp. rouge) au tour suivant, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2/B_1)P(B_1) + P(B_2/\overline{B_1})P(\overline{B_1}) = \frac{b+c}{b+r+c} \cdot \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+c} \cdot \frac{r}{b+r} \\ &= \frac{b}{(b+r+c)(b+r)}(b+c+r) = \frac{b}{b+r}. \end{aligned}$$

- (c) Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle $P(B_1/B_2)$. Pour cela on utilise la formule de Bayes :

$$P(B_1/B_2) = \frac{P(B_2/B_1)P(B_1)}{P(B_2)} = \frac{\frac{b+c}{b+r+c} \cdot \frac{b}{b+r}}{\frac{b}{b+r}} = \frac{b+c}{b+r+c}.$$

- (a) En conservant les notations de 1, on voit que $u_n(x, y) = P(B_n)$ avec $b = x$ et $r = y$. En appliquant la formule des probabilités totales, associée au système complet d'évènement $(B_1, \overline{B_1})$, à l'évènement B_{n+1} on obtient : $P(B_{n+1}) = P(B_{n+1}/B_1)P(B_1) + P(B_{n+1}/\overline{B_1})P(\overline{B_1}) = P(B_{n+1}/B_1)\frac{x}{x+y} + P(B_{n+1}/\overline{B_1})\frac{y}{x+y}$.

Considérons l'évènement B_{n+1}/B_1 : on a obtenu une boule blanche au premier tirage donc on dispose au tour suivant de $x+y+c$ boules dont $x+c$ boules blanches et y boules rouges. A cette étape, il nous faut $(n+1) - 1 = n$ tirages pour aboutir au tirage B_{n+1} et on obtient une boule blanche.

Ainsi l'évènement B_{n+1}/B_1 signifie que l'on a obtenu une boule blanche en n tirages avec $x + y + c$ boules de départ dont $x + c$ boules blanches donc sa probabilité est $u_n(x + c, y)$.

Par le même argumentaire, en remplaçant B_1 par $\overline{B_1}$, blanche par rouge et en remarquant que l'on part de $x + y + c$ boules dont $y + c$ rouges, on voit que $P(B_{n+1}/\overline{B_1}) = u_n(x, y + c)$.

Par conséquent, $u_{n+1}(x, y) = u_n(x + c, y) \frac{x}{x + y} + u_n(x, y + c) \frac{y}{x + y}$.

- (b) On introduit l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{H}_n) : \forall x, y \in \mathbb{N}^\times, \quad u_n(x, y) = \frac{x}{x + y}$

Initialisation : $(\mathcal{H}_1)$ est vraie car $u_1(x, y) = P(B_1) = \frac{x}{x + y}$

Hérédité : supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie. On a $u_{n+1}(x, y) = u_n(x + c, y) \frac{x}{x + y} + u_n(x, y + c) \frac{y}{x + y}$.

L'hypothèse $(\mathcal{H}_n)$ appliquée aux couples $(x + c, y)$ et $(x, y + c)$ montre que $u_n(x + c, y) = \frac{x + c}{x + y + c}$

et $u_n(x, y + c) = \frac{y}{x + y + c}$. On en déduit que

$$u_{n+1}(x, y) = \frac{x + c}{x + y + c} \cdot \frac{x}{x + y} + \frac{y}{x + y + c} \cdot \frac{y}{x + y} = \frac{x}{(x + y + c)(x + y)} [x + c + y] = \frac{x}{x + y}$$

ce qui implique que $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie et cela achève la récurrence.

- (a) $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$. $P(X_1 = 0) = P(\overline{B_1}) = \frac{1}{2}$ et $P(X_1 = 1) = P(B_1) = \frac{1}{2}$ donc $X_1 \sim \mathcal{U}(\{0, 1\})$.

- (b) On veut savoir combien on peut obtenir de boules blanches au cours des deux tirages. Puisque l'on remet la boule tirée et qu'on la repose ensuite (en ajoutant une boule de même couleur), on peut 0, 1 ou 2 boules blanches, donc $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$P(X_2 = 0) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}/\overline{B_1}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (on a pioché une boule rouge au premier tirage, donc au suivant il y a 2 rouges et 1 blanche).

$P(X_2 = 1) = P([\overline{B_1} \cap B_2] \cup [B_1 \cap \overline{B_2}]) = P(\overline{B_1} \cap B_2) + P(B_1 \cap \overline{B_2}) = P(\overline{B_1})P(B_2/\overline{B_1}) + P(B_1)P(\overline{B_2}/B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

(on a pioché une boule rouge au premier tirage, donc au suivant il y a 2 rouges et 1 blanche ou on a pioché une boule blanche au premier tirage, donc au suivant il y a 1 rouge et 2 blanches).

$P(X_2 = 2) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2/B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (on a pioché une boule blanche au premier tirage, donc au suivant il y a 1 rouge et 2 blanches).

Ainsi $X_2 \sim \mathcal{U}(\{0, 1, 2\})$

- (c) On introduit l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{H}_n) : X_n \sim \mathcal{U}(\{0, \dots, n\})$

Initialisation : $(\mathcal{H}_1)$ est vraie (cf. question 3.a)

Hérédité : supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie. La variable X_{n+1} peut prendre toutes les valeurs de 0 à $n + 1$ puisque l'on remet la boule tirée et qu'on la repose ensuite (en ajoutant une boule de même couleur) donc $X_{n+1}(\Omega) = \{0, \dots, n + 1\}$.

Soit $k \in \{0, \dots, n + 1\}$, on veut calculer $P(X_{n+1} = k)$. Pour cela, on introduit le système complet d'évènements $((X_n = q))_{0 \leq q \leq n}$ et en remarquant que $X_n \sim \mathcal{U}(\{0, \dots, n\})$ donc

$$\forall q \in \{0, \dots, n\}, \quad P(X_n = q) = \frac{1}{n + 1}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= \sum_{q=0}^n P(X_{n+1} = k/X_n = q)P(X_n = q) = \sum_{q=0}^n P(X_{n+1} = k/X_n = q) \frac{1}{n + 1} \\ &= \frac{1}{n + 1} \sum_{q=0}^n P(X_{n+1} = k/X_n = q) \end{aligned}$$

L'évènement $(X_{n+1} = k/X_n = q)$ signifie que les n premiers tirages ont donnés q boules blanches et que le tirage suivant en donne k . Du tirage n au tirage $n + 1$, on peut ajouter aucune boule blanche ($k = q$) ou une seule boule blanche supplémentaire ($k = q + 1 \Leftrightarrow q = k - 1$). Par conséquent l'évènement $(X_{n+1} = k/X_n = q)$ est vide si $q \neq k$ ou $k - 1$, ce qui nous donne la formule

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n + 1} (P(X_{n+1} = k/X_n = k) + P(X_{n+1} = k/X_n = k - 1))$$

Pour l'évènement $(X_{n+1} = k/X_n = k)$: au $n^{\text{ème}}$ tirages, on a obtenu k boules blanches (donc $n - k$ boules rouges) ce qui implique que l'on dispose à l'issue des n premiers tirages de $n + 2$ boules (les

deux de départ plus une à chaque tirage) dont $1 + k$ blanches (celles de départ plus une à chaque obtention de blanches) et $(n + 2) - (k + 1) = n - k + 1$ rouges.

Ainsi l'évènement $(X_{n+1} = k/X_n = k)$ signifie que l'on pioche une rouge parmi les $n - k + 1$ rouges dans un paquet de $n + 2$ boules.

Pour l'évènement $(X_{n+1} = k/X_n = k - 1)$: au $n^{\text{ème}}$ tirages, on a obtenu $(k - 1)$ boules blanches (donc $n - (k - 1) = n - k + 1$ boules rouges) ce qui implique que l'on dispose à l'issu des n premiers tirages de $n + 2$ boules (les deux de départ plus une à chaque tirage) dont $1 + (k - 1) = k$ blanches (celles de départ plus une à chaque obtention de blanches) et $(n + 2) - (k - 1) = n - k + 3$ rouges.

Ainsi l'évènement $(X_{n+1} = k/X_n = k - 1)$ signifie que l'on pioche une rouge parmi les $n - k + 3$ rouges dans un paquet de $n + 2$ boules.. Nous pouvons donc calculer les probabilités conditionnelles $P(X_{n+1} = q/X_n = q)$ et $P(X_{n+1} = q + 1/X_n = q)$:

$$P(X_{n+1} = k/X_n = k) = \frac{n - k + 1}{n + 2}, \quad P(X_{n+1} = k/X_n = k - 1) = \frac{k}{n + 2}$$

ce qui nous donne

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n + 1} \left(\frac{n - k + 1}{n + 2} + \frac{k}{n + 2} \right) = \frac{1}{(n + 1)(n + 2)} [n - k + 1 + k] = \frac{n + 1}{(n + 1)(n + 2)} = \frac{1}{n + 2}.$$

Ainsi nous avons obtenu que $X_{n+1}(\Omega) = \{0, \dots, n + 1\}$ et $\forall k \in \{0, \dots, n + 1\}$, $P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n + 2}$, c'est-à-dire $X_{n+1} \sim \mathcal{U}(\{0, \dots, n + 1\})$ donc $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie et la récurrence est démontrée.

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^n k P(X_n = k) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n + 1} = \frac{1}{n + 1} \sum_{k=0}^n k = \frac{1}{n + 1} \cdot \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n}{2}.$$

$$E(X_n^2) = \sum_{k=0}^n k^2 P(X_n = k) = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n + 1} = \frac{1}{n + 1} \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{n + 1} \cdot \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} = \frac{n(2n + 1)}{6}$$

$$\text{Donc } V(X_n) = E(X_n^2) - [E(X_n)]^2 = \frac{n(2n + 1)}{6} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n(n + 2)}{12}$$